LOGIKA

Neformální výklad základů formální logiky

Druhé přepracované a doplněné vydání

Petr Jirků a Jiřina Vejnarová

13. března 2000

Katedra informačního a znalostního inženýrství
Fakulta informatiky a statistiky VŠE
13067 Praha 3, nám. W. Churchilla 4
E-mail: jirku@vse.cz, vejnar@vse.cz

Katedra logiky
Filozofická fakulta UK
11642 Praha 1, Celetná 20
E-mail: Petr.Jirku@ff.cuni.cz

Předmluva k prvnímu vydání

Tento text vznikl na základě semestrálních přednášek konaných v letech 1991 až 1993 na fakultě informatiky a statistiky Vysoké školy ekonomické (obor informatika) a na filozofické fakultě Karlovy univerzity v Praze (obor vědecko-technické informace a knihovnictví). Pro zpracování do současné podoby byl text doplněn pasážemi, které navazují na tradiční výklad predikátové logiky a vytvářejí nezbytné zázemí pro předměty *logické programování*, *expertní systémy* a *teorie racionálního usuzování*. Hlavním cílem je ovšem vyložit základní pojmy logiky, ukázat, jak logika přispívá k pochopení výstavby zejména deduktivních disciplín a tím přispět ke zlepšení kultury myšlení i vyjadřování.

Tématem textu je logika. Podtitul říká, že jde o logiku formální. Formální znamená, že logiku, tak jak ji zde chápeme (tj. v Aristotelské tradici), nezajímá obsah tvrzení, ale jejich forma a vzájemné vztahy, především vztah vyplývání. Výklad je však veden neformálně, což znamená mj., že se sice budeme často odvolávat na intuitivně známé pojmy, ale nebudeme předpokládat žádné předběžné znalosti. Zejména se nepředpokládají žádné speciální znalosti z matematiky, pouze několik intuitivně dobře srozumitelných pojmů z teorie množin, se kterými je čtenář dostatečně obeznámen již na střední škole. Pro čtenáře, který by si potřeboval tyto základní pojmy osvěžit, je připojen dodatek.

Podtitul této publikace ale též říká, že jde o základy logiky. Termín *základy* je zde použit především ve smyslu anglického *elements*, i když, zejména při výkladu neklasických logik, je možno jej někdy chápat i ve smyslu anglického *foundations*. Elementy logiky, jak je v současné době obvyklé, obsahují výklad výrokové a predikátové logiky, nebo jinak, teorií nultého a prvního řádu. Toho jsme se přidrželi i my. Náš výklad je ovšem rozšířen o další témata, která jsou nezbytným předpokladem studia dalších předmětů, nejen těch jmenovaných výše.

Skriptum je určeno především pro studenty informatiky, kteří zamýšlejí studovat hlavní specializaci informační a znalostní inženýrství. Autor však doufá, že bude vhodnou učební pomůckou pro posluchače všech ostatních oborů. Není to text, který by beze zbytku pokrýval všechna témata, o nichž je řeč. Měl by ale umožnit studentovi oprostit se od detailního zapisování přednášek, a tím získat možnost soustředěně sledovat výklad. Předkládaný text je první verzí, která bude postupně přepracovávána v zamýšlenou rozsáhlejší knižní publikaci. Autor bude proto čtenáři vděčný za jakoukoli připomínku ke zlepšení textu.

Jen těžko budeme hledat někoho, kdo by popíral, že je důležité (zejména ve vědě) umět usuzovat logicky. Snad jen výjimečně potkáte člověka, který přizná, že neumí logicky myslet. Ze zkušenosti víme, že lidé v jednoduchých běžných situacích spontánně logicky uvažují, avšak na druhé straně není obtížné nalézt situace, kdy si nevíme rady. Proto se budeme snažit ukázat, že systematické studium logiky může být značným přínosem. Mnozí lidé se však studia logiky obávají, nejčastěji je odrazuje právě formální stránka logiky spojená často s používáním mnoha symbolů, za nimiž laik předpokládá něco nesrozumitelného, odtažitého, vzdáleného přirozenému vyjadřování a usuzování. Chceme tyto obavy rozptýlit. Symbolickým výrazům se ovšem nebudeme vyhýbat, avšak ne proto, abychom vytvořili zdání vědeckosti, ale spíš proto, abychom se vyjadřovali úsporně, přesně a přehledně.

Autor je zavázán oběma recenzentům, RNDr. Kamile Bendové, CSc. (Katedra logiky FF UK) a doc. RNDr. Janu Coufalovi, CSc. (Katedra matematiky FIS VŠE) za pečlivé přečtení textu, za pomoc při odstraňování četných nedopatření, ale především za cenné připomínky, náměty a diskuse vedoucí ke zlepšení textu. Poděkování ovšem patří i studentům, kteří v letním semestru 1993 úspěšně pracovali s neúplným textem a nepřímo se podíleli na jeho vzniku.

Petr Jirků, červen 1993

Předmluva ke druhému vydání

Po několikaleté zkušenosti s výukou logiky různých typů posluchačů jsme s kolegyní Jiřinou Vejnarovou přistoupili k doplnění a z větší části přepracování předkládaného učebního textu základního kurzu.

Co se změnilo především. Samozřejmě, že jsme odstranili některá nedopatření a drobné chyby, ale to nebylo nejdůležitější, nebylo jich příliš mnoho.[1] Zaměřili jsme se především na to, aby text byl vybaven dostatečným množstvím příkladů a cvičení. Po těch studenti vždycky oprávněně volají. A konečně, doplnili jsme některá témata, která se ukázala aktuální.

Za pečlivé přečtení a cenné připomínky jsou oba autoři druhého vydání tentokrát zavázáni recenzentům emeritnímu doc. PhDr. Zdeňku Zastávkovi, CSc. (Katedra logiky FF UK) a doc. RNDr. Janu Coufalovi, CSc. (Katedra matematiky FIS VŠE).

Petr Jirků a Jiřina Vejnarová, leden 2000

[1] Za všechny je ovšem odpovědný první autor.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Co je formální logika

Logiku je obvyklé charakterizovat jako analýzu metod lidského myšlení či uvažování, což odpovídá i etymologii slova logika. Často také slovo logika slýcháme s různými přívlastky, mluví se o formální logice, matematické logice, symbolické logice, ale také o intuicionistické logice, modálních logikách, vícehodnotových logikách, pravděpodobnostní logice, deontické logice a mnoha dalších. Termín logika se často vyskytuje i v běžné řeči v rozmanitých slovních spojeních jako *to nemá žádnou logiku, neúprosná logika vývoje, ženská logika, logika věci vyžaduje, aby* ... apod.

Odkud termín logika vlastně pochází? Evangelista sv. Jan v prvním verši první kapitoly praví, že na počátku bylo Slovo (řecky $\lambda o\gamma o\varsigma$), tedy jazyk, myšlení, uvažování, ale též řád věcí. Logik si v této souvislosti klade otázku, jak tento řád uchopit, co je to pravda, co je z pravdivých tvrzení odvoditelné a popřípadě, jak obtížné je důsledky odvodit. Logické odvozování se odehrává v jazyce. Každá vědní disciplína si vytváří svůj jazyk, má svoje pojmy a tedy i svoji logiku. Některé pojmy jsou transdisciplinární, jsou společné všem vědním disciplínám, i každodennímu usuzování. Aristoteles nás naučil, že jedny výroky souvisejí s jinými, jsou důsledky jiných, dokonce, že celé množiny výroků souvisejí s jinými množinami výroků. Jsou dva způsoby, jak se dovědět něco o pravdivosti výroků a korektnosti tvrzení: *evidence* a *rozum*. Máme dát přednost evidenci anebo rozumu? Logika straní rozumu, ale jen do určité míry. Zdá se, že logické důkazy jsou redukovány na posloupnosti evidencí. "Čím více zákonů logiky známe", říká Petr Vopěnka v Rozpravách s geometrií, "tím více můžeme rozum vytlačit z přímého rozhodování o správnosti úvah, které jsme v myšlení vykonali. Stačí se totiž podívat, zda se taková úvaha zákony logiky řídí. Správnost takové úvahy již jen evidujeme, a ověříme-li takto její správnost, není již potřebné zkoumat ji rozumem." Pro člověka to však má opět své meze. Vždy jsme schopni jen nepatrného počtu evidencí. Například iterované aplikace pravidel odvozování jsou ústupkem, který sice činíme ve prospěch rozumu (dlouhé důkazy rozhodně nejsou evidentní), ale vždy se ochotně vracíme k evidencím. V této souvislosti se naskýtá otázka, zda stejné meze má i stroj. Ať tak či onak, jako hledači důvodů a důsledků narážíme jednak na svá vlastní omezení jednak na skutečnost, že svět se neustále mění. Logika, odkázaná nám Aristotelem a v tomto století rozvíjená v prostředí matematiky a zahleděná do základů matematiky, vyzdvihnuvší statickou stránku relace odvoditelnosti, se v současné době snaží postihnout i dynamiku usuzování, tj. nalézt racionální prostředky charakterizující změny epistemických stavů.

Zkoumáme-li nějakou, třeba matematickou strukturu, postupujeme často tak, že formulujeme tvrzení o této struktuře, která jsou, řekněme, evidentní a která tuto strukturu pokud možno co nejlépe vystihují. Pak se na základě jistých pravidel usuzování snažíme odvodit další netriviální tvrzení o zkoumané struktuře. *Vytváříme kalkul.* Tato struktura může být ovšem "modelem" nějaké reálné struktury. (Formální) kalkul používáme vždy, když chceme "vypočítat" to, co není ve struktuře evidentní. Mezi klasické, nejlépe prozkoumané, a stále nejdůležitější kalkuly v logice patří **výrokový** a **predikátový počet** (označení výroková a predikátová logika budeme používat jako synonyma), jimž věnujeme nejvíce místa (kap. 2 a 3), zmíníme se ovšem i o tzv. **neklasických logikách**, o důvodech jejich vzniku a samozřejmě o přímých i nepřímých aplikacích (kap. 5). Dynamikou epistemických stavů se pak budeme zabývat v kap. 6. To už je oblast, která podle některých do logiky nepatří, protože úsudky nezachovávají pravdivost. Avšak v původním pojetí je logika předmětem, který se zabývá nejen relací odvoditelnosti či dokazatelnosti, ale též postupy jak správně argumetovat. To navíc zavání psychologií, úvahami o otázkách strategie a taktiky argumentace. Kdysi byla do logiky dokonce zahrnována např. i rétorika. V našem plánu se však těmito otázkami nebudeme zabývat, i když jde jistě o zajímavá témata. Budeme se starat spíše o formální a strukturální vlastnosti úsudků.

Jestliže však začínáme hovořit o formálních vlastnostech myšlení či v užším slova smyslu usuzování, je třeba hned na počátku říci, že označení *formální* či *symbolická logika* neznamená, že jde o nějaké postupy, které jsou jen pro zasvěcené. Logika není formální proto, že pracuje se symboly, které by měly nějaký tajemný význam, je formální proto, že ji nezajímá obsah našich sdělení, ale že na základě formy úsudků odvozujeme jejich korektnost. Formální zkoumání jakéhokoli skutečného objektu a jeho vztahu k jiným objektům spočívá v odpovídající abstraktní a idealizované charakterizaci tohoto objektu a vztahů k jiným objektům či strukturám. Můžeme tedy říci, že v logice místo samotného procesu myšlení zkoumáme jazyk, nebo, jak ještě několikrát uvidíme, jakousi formalizovanou, obvykle drasticky zjednodušenou verzi každodenního jazyka, či posloupností výpovědí o vnějším světě. Předmětem zkoumání však není vztah vnějšího světa a naší případné formalizace. Budeme se samozřejmě věnovat otázkám interpretace výpovědí v širším kontextu, ale převážně si budeme klást otázky, zda to, co je z hlediska logiky nezbytné, je nezbytné i mimo tento kontext.

Ještě k termínu *matematická logika.* Tento termín je často používán jako další alternativa pro označení formální či symbolické logiky. Přesto jej lze chápat ve dvou významech. Buď se tím chce vyjádřit, že pro zkoumání logických pojmů jsou používány matematické prostředky (což budeme činit i my), anebo že zkoumání logických systémů je zaměřeno do základů matematiky. My se samozřejmě budeme zabývat spíše těmi aspekty logiky, které nejsou tak striktně svázány s matematikou samotnou, a které mají obecnější metodologický dosah. Brzy ale bude zřejmé, že je dost obtížné rozlišit, co je primární, zda matematika či logika. To je dáno jednak tím, že z historického hlediska to byla právě matematika, která přinášela a stále přináší podněty pro rozvoj logických zkoumání, a jednak tím, že snaha vybudovat pro matematiku pevné základy si vyžádala precizovat logické pojmy. Z tohoto pohledu se nám může jevit vztah matematiky a logiky jako uzavřený kruh, v každém případě je to kruh značné metodologické hodnoty.

1.1.1 Poznámka o vývoji logiky

Logika byla s matematickým náhledem spojována už od dob, kdy sama matematika začala být chápána jako vědecká disciplína. Thales Milétský byl už v 6. století před naším letopočtem nejen skvělým geometrem, ale uvědomoval si, že dobré poznatky je třeba zdůvodňovat. Ale ne každý důvod je dobrý. Logicky uvažovat znamená, mimo jiné, hledat racionální argumenty.

Aristotelská logika. Aristotelés je všeobecně považován za zakladatele logiky a bez nadsázky můžeme říci, že logiky formální. Formální v tom smyslu, jak jsme o tom hovořili už v předchozím odstavci a jak formální logiku *de facto* chápeme dnes. Aristotelés přinesl logice pojem sylogismu a podrobně jej prozkoumal. Sylogistika se pak stala hlavním tématem logických zkoumání až do konce středověku.

Eukleides při vytváření základních pilířů geometrie nás naučil axiomatické metodě, která sehrála významnou úlohu o dva tisíce let později při hledání axiomů teorie množin jež se stala důležitým prizmatem, jímž nahlížíme moderní matematiku.

Dalším obdobím, jehož počátek je obvykle datován velmi přesně rokem 1662, kdy Nicole Arnauld vydal dílo *La loqic ou l'art de penser* (Logika, čili umění myslet) a které je někdy nazýváno *Logika z Port-Royal*, kdy převládají otázky epistemologické a psychologické. Lze vytušit, že to bylo pro rozvoj logiky období nejméně plodné, v některých aspektech občas dokonce i zavádějící. Až opět návrat k matematickému zázemí logiky, který je spojem se jmény Gerge Boolea, Johna Venna a dalších, dává podnět ke vzniku toho, co dnes obvykle nazýváme klasickou výrokovou logikou. Třetí, pro logiku velmi významné období je zrod predikátové logiky, dílo člověka, který se narodil před 150ti lety, tj. v roce, kdy v Praze zemřel jiný velikán, který významně ovlivnil náš pohled na logiku a matematiku – Bernard Bolzano. Gottlobu Fregovi vděčíme za predikátovou logiku, která se pro nás stala jedním z nejvýznamnějších nástrojů studia racionální argumentace. Je to náš hlavní nástroj pro formulování teorií i pro analýzu jejich logické struktury.

Dvacáté století pak přineslo nebývalý rozvoj logiky zpočátku zejména právě při zkoumání základů matematiky. Opět to byly paradoxy (Russellův, Bourali-Fortiho a další), které se na přelomu 19. a 20. století objevily při budování teorie množin, jejíž intuitivní základy položili Bernard Bolzano a Georg Cantor. Bertrand Russell pak obohatil logiku o teorii typů, David Hilbert vytvořil program formalizace, jímž chtěl zabezpečit v té době skrze paradoxy poněkud zpochybněné základy matematiky samotné. Kurt Gödel ale ve třicátých letech zřetelně ukázal na vnitřní meze programu formalizace. Druhá polovina 20. století je ve znamení digitalizace, což pro logiku mj. znamená obrat k algoritmizaci, k vyčíslitelnosti a posléze k otázkám složitosti výpočtových procesů. Allan Turing podal rigorózní, tj. formální charakteristiku výpočtového zařízení, které je po něm nazváno Turingův stroj, a položil otázku možnosti umělé inteligence.

Vývoj logiky byl v posledních dvou mileniích nejen bohatý, ale často i dramatický. Čtenáře, který by se zajímal podrobněji o historii logiky od Aristotela až do poloviny 20. století odkazujeme na reprezentativní dílo manželů Knealových *The Development of Logic* [33]. Jak bude vývoj logiky vypadat na samém začátku třetího milenia lze jen těžko odhadovat. Je však téměř jisté, že budou zkoumána nová témata, která se budou týkat nejen nových pohledů na staré otázky, ale v kontextu vznikající informační společnosti budeme řešit nejen otázky, které se budou týkat nejen naší performance, ale též otázky porozumění naší mysli.

1.1.2 Program

Nejprve standardním způsobem vyložíme *výrokovou logiku* a nejlépe prozkoumaný logický kalkul teorií prvního řádu - *predikátový kalkul.* [1] Uvidíme, že klasická predikátová logika prvního řádu, i když velmi bohatá a zajímavá, přece jen využívá značně omezených vyjadřovacích prostředků. Proto v další kapitole budeme zkoumat alternativní přístupy, tj. budeme se zabývat např. *modálními logikami*, v nichž nám půjde o analýzu takových jazykových výrazů (modalit) jako "je možné, že ...", "je nutné ..." a *vícehodnotovými logikami*, tj. logikami s více než dvěma pravdivostními hodnotami, abychom vyjádřili neurčitosti. V další kapitole pak budeme uvažovat o metodách usuzování, které se vymykají běžnému požadavku kladenému na odvozovací pravidla, tj. požadavku zachování pravdivosti při odvozování. Snadno se totiž přesvědčíme, že se v našich každodenních úvahách nevyhneme logicky nekorektním úsudkům, abychom se orientovali ve světě s neúplnými informacemi či informacemi měnícími se v čase.

Náš program tedy bude následující: výroková logika, predikátová logika, neklasické

[1] Termíny *kalkul, počet, logika* budeme, pokud nebude nic jiného řečeno, zde chápat jako synonyma.

logiky (vícehodnotové logiky, intuicionistická logika, modální a popř. kondicionální logiky) a konečně logiky navržené pro usuzování s neúplnou a vágní informací. Tato část výkladu už vlastně překračuje elementární kurs logiky a je přípravou pro další specializované kursy. Nakonec se zmíníme též o vztahu formální logiky, filozofické logiky a analytické filozofie, což je ovšem již zcela samostatné téma, kterému bude třeba věnovat i samostatný text.

Text je doplněn stručným přehledem významných světových logiků s odkazy na jejich nejdůležitější výsledky a díla a pochopitelně i přehledem literatury. Na tomto místě se zmíníme pouze o časopisech. Ve světovém měřítku je v oboru logika nejvýznamnějším časopisem patrně *The Journal of Symbolic Logic* vydávaný čtvrtletně mezinárodní Asociací symbolické logiky. U nás vycházel čsp. *From the Logical Point of View* vydávaný Akademií věd ČR, bohužel v roce 1995 vyšel naposledy. Pravidelně se u nás pod názvem *Logica* konají mezinárodní konference pořádané oddělením logiky Filozofického ústavu AV ČR.

Výklad je veden volnou formou, významnější definice jsou zdůrazněny, u většiny důležitých tvrzení jsou podány nebo aspoň naznačeny důkazy. Rozsah textu však nedovoluje podat detailní důkazy všech tvrzení, protože by tím neúměrně vzrostl rozsah používaného technického aparátu. Autoři se však domnívají, že čtenář získá dostatečné prostředky, aby v případě hlubšího zájmu mohl samostatně číst odbornou literaturu o logice. Proto v některých případech odkazujeme na jiné dostupné publikace v českém jazyce, zejména na knihu [30].

Kapitola 2

Výroková logika

2.1 Výroky

Výroková logika (někdy říkáme též *výrokový počet* nebo *výrokový kalkul*) se zabývá těmi formami usuzování, u nichž platnost závěrů nezávisí na smyslu ani na vnitřní struktuře výroků, ale výhradně na pravdivosti či nepravdivosti těchto výroků.

Rozeberme následující věty českého jazyka, abychom porozuměli, co myslíme výrokem:

1. *Gen je biologická struktura.*
2. *Gen není biologická struktura.*
3. *Na Marsu je život.*
4. *Ve vesmíru existuje život i mimo Zemi.*
5. *Život je pravoúhlý.*
6. *Pravoúhlý život je když.*

Cítíme, že mezi uvedenými šesti výpověďmi jsou nápadné rozdíly, ptáme-li se na jejich pravdivost či nepravdivost. Jistě se shodneme v tom, že věta 1) je pravdivá a věta 2) je nepravdivá. Nic takového ale nemůžeme říci o větách 3) a 4), jimž pravdivost nebo nepravdivost nejsme schopni přisoudit s jistotou. Co však můžeme konstatovat, je fakt, že naše míra přesvědčení o pravdivosti věty 3) klesá, zatímco u věty 4) roste díky např. kosmickým výzkumům. Věty 3) a 4) jsou pravdivé, nebo nepravdivé, ale naše prostředky, jak zjistit jejich pravdivostní hodnotu, nejsou dostatečně silné. Úplně jinak je tomu u vět 5) a 6). Věta 6) není dobře sestavená, její skladba neodpovídá pravidlům skladby českého jazyka, nemá tudíž smysl cokoli říkat o její pravdivosti či nepravdivosti. Věta 5) je sice gramaticky správná, avšak zjevně nesmyslná vzhledem k vadnému použití predikátu *pravoúhlý*. Zde rovněž nemá smysl uvažovat o její pravdivosti či nepravdivosti. Někdy říkáme, že věta 6) odporuje syntaxi, zatímco věta 5) sémantice českého jazyka.[1]

V dalším se budeme zabývat výhradně výpověďmi typu 1) až 4). Budeme je nazývat výroky.

Definice 2.1.1 Výrok *je věta jazyka, které má smysl přiřadit pravdivostní hodnotu, tj. věta, o které má smysl říci, zda je pravdivá, či nepravdivá.*

To, zda je daný výrok pravdivý či nikoli, však případně nemusíme právě vědět. Jak zjistíme pravdivostní hodnotu konkrétního výroku, to není předmětem logiky, ale speciálních věd nebo jiných zkoumání.

2.2 Výrokové spojky a složené výroky

Ve výrokové logice se zajímáme o to, jak pravdivost či nepravdivost jedněch výroků souvisí s pravdivostí či nepravdivostí jiných výroků. Chceme vědět, za jakých podmínek můžeme z pravdivosti jedněch výroků usuzovat na pravdivost jiných výroků. Nejprve si však všimneme, že z daných výroků můžeme v jazyce skládat *složené výroky* (někdy nazývané *sentence*). Tak např. z výroků 1) a 3) vytvoříme spojkou *nebo* nový výrok: *Gen je biologická struktura nebo na Marsu je život.* V tomto jednoduchém případě je zřejmé, že vzhledem k tomu, že první výrok je pravdivý, je i výsledný složený výrok pravdivý. To je vlastnost spojky *nebo*.[2] Přirozený jazyk disponuje ještě dalšími spojkami, které umožňují vytvářet složené výroky a které mají tu vlastnost, že pravdivost či nepravdivost výsledného výroku je určena pravdivostními hodnotami původních výroků. O takových spojkách někdy říkáme, že jsou *extenzionální*. K extenzionálním spojkám patří vedle spojky ... *nebo* ... takové výrazy jazyka jako

... *a* ...,

jestliže ..., *pak* ...,

... *je ekvivalentní* ...,

[1] Je ovšem třeba poznamenat, že v běžné komunikaci používáme často jen neúplných částí vět přirozeného jazyka, rozhovor jen zřídka probíhá v celých větách, a přitom si většinou rozumíme. To je ale jiná otázka. Zde budeme uvažovat o jazykových výrazech, které je možno považovat za věty jazyka.

[2] Je samozřejmě jedno, je-li pravdivý první či druhý výrok.

není pravda, že …

apod. Pro logické výrokové spojky můžeme sestavit definiční tabulky, které určují pravdivostní hodnoty složených výroků. Můžeme je v jistém smyslu považovat za definice extenzionálních výrokových spojek.

Označíme-li symbolem 1 pravdivostní hodnotu pravda a symbolem 0 pravdivostní hodnotu nepravda, budou definiční tabulky pro dobře známé logické spojky vypadat takto:

Jednomístná spojka, kterou nazveme *negace* a označíme symbolem $\neg$.

V	$\neg V$
1	0
0	1

Dvoumístné spojky *konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence*, které označíme postupně symboly $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.[3]

V_1	V_2	$V_1 \wedge V_2$	$V_1 \vee V_2$	$V_1 \Rightarrow V_2$	$V_1 \Leftrightarrow V_2$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Výrok, vytvořený ze dvou výroků pomocí spojky konjunkce, čteme V_1 *a* V_2, výrok, vytvořený pomocí disjunkce, čteme V_1 *nebo* V_2, implikaci čteme *jestliže* V_1, *pak* V_2 a konečně ekvivalenci čteme V_1 *je ekvivalentní* V_2. Jinými slovy, konjunkce znamená současnou platnost obou výroků, disjunkce platnost alespoň jednoho výroku. [4] Ekvivalence znamená, že oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu, tj. že jsou buď oba pravdivé nebo oba nepravdivé. Implikace je nepravdivá, když první výrok (antecedent) je pravdivý a druhý (konsekvent) nepravdivý, ve všech ostatních případech je pravdivá. To mj. znamená, že implikace je jediná z dosud uvedených logických spojek, kde záleží na pořadí výroků.

[3]To, že jsme k označení pravdivostních hodnot *pravda* a *nepravda* použili číslic a pro označení výrokových spojek pro někoho možná nezvyklých symbolů, nemá žádný skrytý, natož pak nějaký tajemný význam. Jsou to jen zkratky, které nám naopak pomáhají učinit zápisy složených výroků přehlednými.

[4]V češtině můžeme spojku *nebo* chápat dvěma způsoby. Jednak v nevylučovacím smyslu, jak jsme právě uvedli, kdy složený výrok je pravdivý, je-li pravdivý aspoň jeden z obou výroků, jednak ve vylučovacím smyslu, kdy složený výrok je pravdivý, je-li pravdivý právě jeden z obou základních výroků. Některé jazyky mají pro to dokonce různé termíny. Tak např. latina má pro nevylučovací *nebo* výraz …*vel*…, pro vylučovací *nebo* výraz *aut*…*aut*…. Česky obvykle spojku *nebo* ve vylučovacím smyslu vyjadřujeme výrazem buď … anebo ….

Na konci tohoto odstavce je ovšem třeba učinit jednu důležitou poznámku o vztahu přirozeného jazyka a formálního jazyka výrokové logiky, přesněji o tom, jak výrazy přirozeného jazyka formalizovat. Není to tak snadné, či lépe řečeno, není to tak jednoznačné. Je jistě pravdou, že logická konjunkce je nejčastěji vyjadřována českým … *a* …, avšak ne každé české … *a* … vyjadřuje konjunkci, o které jsme se dohodli, že je komutativní (nezáleží na pořadí výroků). O tom, že ne každé české *a* či anglické *and* musí vyjadřovat konjunkci, se přesvědčíme snadno na příkladech. Vyslovíme-li např. českou větu: *Upadl a vstal* a větu: *Vstal a upadl.*, tak je ihned zřejmé, spojka *a* zde neznamená konjunkci, ale nejspíš časovou následnost dvou událostí. Zřejmě není třeba zvlášť argumentovat, že časová následnost událostí není komutativní. Takže bychom, trochu paradoxně, mohli konstatovat, že logika začíná až tam, kde už logickou strukturu věty známe. Vyžaduje to nepochybně cit pro daný přirozený jazyk. Snaha po automatickém "překladu" věty přirozeného jazyka do formálního jazyka je velké téma komputační lingvistiky.

2.2.1 Booleovské funkce

Na základě základních tabulek můžeme podobně sestavit tabulku libovolného složeného výroku. Například výrok $(V_1 \wedge V_2) \Rightarrow (\neg V_2)$ bude mít následující tabulku:

V_1	V_2	$V_1 \wedge V_2$	$\neg V_2$	$(V_1 \wedge V_2) \Rightarrow (\neg V_2)$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1

Ta vznikla tak, že jsme nejprve vytvořili tabulku konjunkce $V_1 \wedge V_2$, potom tabulku negace výroku V_2, a nakonec tabulku našeho složeného výroku.

Zde vidíme, že v případě, kdy výroky V_1, V_2 jsou pravdivé, je složený výrok $(V_1 \wedge V_2) \Rightarrow (\neg V_2)$ nepravdivý. V ostatních případech, nezávisle na tom, jaké jsou pravdivostní hodnoty prvotních výroků V_1 a V_2, je výsledný výrok pravdivý. Jak uvidíme dále, v logice mají výsadní postavení výroky, které jsou *vždy pravdivé* nebo *vždy nepravdivé*, tj. jsou pravdivé (resp. nepravdivé) nezávisle na pravdivostních hodnotách prvotních výroků, z nichž jsou složeny. Vždy pravdivým výrokům budeme říkat *tautologie*, výrokům, které jsou vždy nepravdivé, budeme říkat *kontradikce*. V dalších odstavcích se jim budeme věnovat podrobněji.

V tomto odstavci si nyní všimneme ještě dalších výrokových spojek, budeme dokonce uvažovat o všech myslitelných tabulkách. Chápeme-li tabulky jako matematické funkce zobrazující n-tice nul a jedniček do množiny $\{0, 1\}$, mluvíme o *booleovských funkcích* n argumentů.

Jaké jsou tedy všechny myslitelné tabulky definující spojky dvou výroků? Snadno zjistíme, že takových tabulek je šestnáct: [5]

V_1	V_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

S některými z uvedených tabulek (booleovských funkcí[6]) jsme se již seznámili, některé se téměř nepoužívají. Kromě nám již známých spojek disjunkce (tabulka č. 2), konjunkce (tab. 8), implikace (tab. 5), ekvivalence (tab. 7) se běžně používá spojka $\oplus$ (tab. 10) nazývaná *vylučovací nebo* a někdy označovaná symbolem *xor* z anglického *exclusive or.*

Spojku, která uděluje složenému výroku vždy hodnotu 1 (tab. 1) nezávisle na hodnotách elementárních výroků, budeme nazývat *true.* Analogicky spojku, která nabývá vždy hodnoty 0 (tab. 16), budeme nazývat *false.*

K zajímavým spojkám patří též *Shefferův operátor* (tab. 9) obvykle označovaný symbolem $\mid$ (nebo také *nand* z anglického *not and*) a *Peircův operátor* $\downarrow$ (popř. *nor* opět z anglického *not or)* (tab. 15). Oba tyto operátory se vyznačují tím, že pomocí každého z nich lze definovat všechny ostatní booleovské funkce. Peircův operátor znamená vlastně oboustranný zápor, který v běžném jazyce obvykle vyjadřujeme výrazem *ani … ani …*, zatímco Shefferrův operátor vyjadřuje neslučitelnost výroků (tj. *nikoli … a … současně*).

Tyto úvahy nás vedou k následující definici.

Definice 2.2.1 *Řekneme, že množina výrokových spojek je* funkčně úplná*, když stačí k definování všech 16 dvoumístných spojek.*

Příkladem funkčně úplné množiny výrokových spojek je $\{\neg, \vee\}$. Zřejmě každá množina výrokových spojek obsahující funkčně úplnou množinu je rovněž funkčně úplná.

---

[5] Obecně platí, že výrokových spojek spojujících n výroků neboli n-místných booleovských funkcí je 2^{2^n}.

[6] Označení *booleovské funkce* se používá na počest anglického matematika George Boolea, který se v první polovině minulého století významně zasloužil o rozvoj logiky, zejména o její algebraické pojetí.

Cvičení 2.2.1 *Které z následujících množin výrokových spojek jsou úplné? Pro úplné množiny spojek uveďte vždy definice ostatních spojek.*

1. $\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
2. $\{\neg, \wedge\}$
3. $\{\wedge, \vee\}$
4. $\{\neg\}$
5. $\{\Leftarrow, \neg\}$
6. $\{\wedge, \oplus, \neg\}$
7. $\{\downarrow\}$
8. $\{|\}$

Odpověď*: 1., 2., 5., 6., 7., 8. — ano, je úplná; 3., 4. — ne, není úplná.*

Prozatím jsme pracovali pouze s logickými spojkami či booleovskými funkcemi jednomístnými (negace) a dvoumístnými. Můžeme samozřejmě konstruovat booleovské funkce spojující více než dva výroky. S takovými logickými spojkami se ovšem setkáváme jen zřídka. Častější použití má např. trojmístná spojka *if* ... *then* ... *else* ..., kterou dobře znají a používají programátoři. Pravdivostní hodnota výroku *if* A *then* B *else* C je rovna hodnotě výroku B, pokud A je pravdivý výrok (má hodnotu 1), ve všech ostatních případech má výrok *if* A *then* B *else* C hodnotu výroku C.

Pravdivostní tabulka definující spojku *if* ... *then* ... *else* ... bude tedy následující:

A	B	C	if A then B else C
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

To je ale jen nepatrný zlomek ze všech možných trojmístných booleovských funkcí. Snadno zjistíme, že trojmístných booleovských funkcí je 2^{2^3}, tj. 256, čtyřmístných booleovských funkcí je 2^{2^4}, tj. 65536. Dramatický nárůst!

Vraťme se ještě krátce k jednomístným logickým spojkám (i když je vlastně dost podivné mluvit o spojce, která spojuje jediný výrok). Dosud jsme poznali jedinou — negaci. Vytvoříme-li však všechny myslitelné kombinace, vidíme, že jsou čtyři:

V	1	2	3	4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Třetí sloupec tabulky se týká nám už dobře známé negace, druhý se týká spojky, kterou budeme někdy nazývat *asserce*, a první a čtvrtý sloupec odpovídají jednomístným spojkám *true* a *false*.

Cvičení 2.2.2

1. *Ověřte, že platí*

   $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow$ if A then B else $true$.

   $(A \wedge B) \Leftrightarrow$ if A then B else $false$.

   $(\neg A) \Leftrightarrow$ if A then $false$ else $true$.

2. *Ověřte, že množiny výrokových spojek* $\{\neg,$ ifthenelse$\}$ *a* $\{$ifthenelse, true, false$\}$ *jsou funkčně úplné, zatímco množina* $\{$ifthenelse$\}$ *nikoli.*

3. *Ověřte, že výrok* if V then $\neg V$ else V *je vždy nepravdivý (pro každou pravdivostní hodnotu výroku* V *nabývá hodnoty* 0*).*

4. *Ověřte, že platí*

   $$\neg V \Leftrightarrow (V | V),$$
   $$(V_1 \wedge V_2) \Leftrightarrow ((V_1|V_2)|(V_1|V_2)),$$
   $$(V_1 \vee V_2) \Leftrightarrow ((V_1|V_1)|(V_2|V_2)).$$

5. *Ověřte, že platí*

   $$\neg V \Leftrightarrow (V \downarrow V),$$
   $$(V_1 \vee V_2) \Leftrightarrow ((V_1 \downarrow V_2) \downarrow (V_1 \downarrow V_2)),$$
   $$(V_1 \wedge V_2) \Leftrightarrow ((V_1 \downarrow V_1) \downarrow (V_2 \downarrow V_2)).$$

6. *Ověřte, že platí*

   $$(V_1 \vee V_2) \Leftrightarrow (V_1 \wedge \neg V_2) \vee (\neg V_1 \wedge V_2) \vee (V_1 \wedge V_2).$$

2.3 Jazyk výrokové logiky. Formule

Je na čase precizovat vyjadřovací prostředky výrokové logiky, tj. definovat její jazyk, který bude sestávat z výrazů vytvářených ze jmen výroků a výrokových spojek. Snadno nahlédneme, že výroků může být mnoho, dokonce nekonečně mnoho. Protože v logice nám ale nejde o konkrétní výroky, budeme předpokládat, že jazyk výrokové logiky obsahuje nekonečně mnoho *proměnných* zastupujících konkrétní výroky.[7] Výrokové proměnné budeme obvykle označovat symboly řecké abecedy $\varphi, \psi, \chi, \ldots$, případně opatřenými indexy.

Naproti tomu výrokových spojek bude jen několik málo.[8]

Definice 2.3.1 *(Formule výrokové logiky)*

1. *Každá výroková proměnná je formule.*
2. *Když φ, ψ jsou výrokové formule, pak i $\neg\varphi, \varphi \wedge \psi, \psi \vee \varphi, \psi \Rightarrow \varphi, \psi \Leftrightarrow \varphi$ jsou formule.*
3. *Žádné jiné výrazy nejsou formulemi výrokové logiky.*

Na tomto místě je dobré zdůraznit, že bod 3 v definici formule je důležitý. První dvě podmínky totiž nevylučují, že by i jiné objekty než vyhovující bodům 1 a 2 mohly být formulemi. Jinými slovy, množina správně utvořených formulí výrokové logiky je nejmenší množina obsahující všechny proměnné a uzavřená podle bodu 2.

Příklad 2.3.1 *Výrazy $(\varphi \wedge \psi)$, φ, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \vee (\varphi \vee \varphi)$, jsou formule výrokové logiky, zatímco výrazy $\varphi\neg(\Rightarrow (\psi \wedge \chi))$, $(\varphi \vee (\psi \Rightarrow)\chi)$, $\neg\varphi\neg$ nejsou (správně utvořené) formule.*

Později budeme potřebovat i pojem *podformule.* Podformuli definujeme jako souvislou část formule, která je sama formulí. Z pojmu podformule je patrné, že každá formule je svou podformulí. Chcele-li hovořit o podformulích, které jsou různé od původní formule, používáme termín *vlastní podformule.* Takže např. výraz $\varphi \wedge \psi$ je podformulí formule $\chi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$, zatímco $\chi \Rightarrow \varphi$ ani $\chi \Rightarrow \psi$ nejsou jejími podformulemi.

[7] Je samozřejmě možné pracovat i s konečným počtem prvotních výroků. Pak ale, přísně vzato, jazyk výrokové logiky nebude určen jednoznačně, neboť bude záviset právě na výchozí množině prvotních výroků. Je ovšem patrné, že to je jen technická otázka.

[8] Dokonce i v případě výrokových spojek bychom vlastně měli rozlišovat jazyky podle toho, které výrokové spojky obsahují. Z předchozího odstavce o booleovských funkcích víme, že bychom mohli vystačit dokonce s jedinou spojkou, my se však přidržíme obvyklého přístupu, kdy jazyk bude obsahovat na počátku jedinou jednomístnou spojku (*negaci*) a dvě dvojmístné spojky (*konjunkci* a *disjunkci*).

Cvičení 2.3.1 *Zapište všechny vlastní podformule formulí*

1. $(\varphi \wedge \neg\psi) \Rightarrow \neg(\chi \vee \varphi)$,
2. $\neg\neg\neg\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$,
3. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$.

Odpověď:

1. $\varphi, \psi, \chi, \neg\psi, \varphi \wedge \neg\psi, \chi \vee \varphi, \neg(\chi \vee \varphi)$
2. $\varphi, \neg\varphi, \neg\neg\varphi, \neg\neg\neg\varphi, \psi, \psi \Rightarrow \varphi$
3. $\varphi, \psi, \psi \Rightarrow \varphi$

2.3.1 Varianty zápisu formulí

Na tomto místě je třeba říci, že jsme se dopustili drobné nepřesnosti, když jsme ve formulích použili závorek, o kterých se v definici formule nic neříká. Čtenář má ovšem třeba z matematiky zkušenost, že pomocné symboly (v našem případě závorky) jsou vhodné k tomu, abychom odstranili případnou víceznačnost zápisu, např. ve formuli $\varphi \wedge \psi \vee \chi$. Tomuto zápisu lze porozumět dvěma způsoby:

1. $(\varphi \wedge \psi) \vee \chi$
2. $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$

S problematikou víceznačnosti formulí se ovšem můžeme vypořádat i bez pomoci závorek, což bývá důležité v situacích, kdy chceme s formulemi pracovat na počítači. Závorky jsou vhodné pro usnadnění čtení, přemíra závorek nám ale často činí potíže. Každý programátor, který psal program např. v jazyce Lisp, ví, jak snadné je zapomenout jednu závorku.

Dohodneme-li se však, že symboly spojek budeme psát důsledně vždy před oba argumenty, tedy místo $(\varphi \wedge \psi)$ budeme psát $\wedge(\varphi, \psi)$, nemusíme už závorky používat a stačí tuto formuli zapisovat ve tvaru $\wedge\varphi\psi$. Takovému zápisu formulí, kdy spojka (operátor, funkční symbol apod.) je před argumenty, které spojuje, říkáme *prefixová notace* nebo též *polská notace*. Obvyklou notaci, kterou ze zřejmých důvodů nazýváme *infixová notace*, budeme ale i nadále používat, zejména proto, že jsme na ni pod vlivem matematiky zvyklí. Často je i přehlednější. Prefixová notace je však univerzální, žádné potíže nevzniknou ani u výrazů s více než dvěma argumenty.

Takže např. výrazy *if A then B else C*, *ifthenelse(A, B, C)*, *ifthenelse A B C*

jsou pro nás ekvivalentní.

Cvičení 2.3.2 *Převeďte do polské notace formule ze cvičení 2.3.1.*

Odpověď*:*

1. $\Rightarrow \wedge\varphi\psi\neg \vee \chi\varphi$,

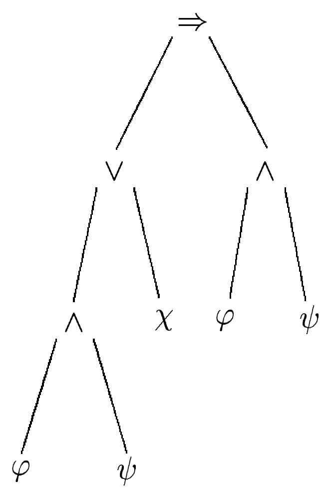
2. $\Rightarrow \neg\neg\neg\varphi \Rightarrow \psi\varphi$,

3. $\Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi\varphi$.

Cvičení 2.3.3 *Formuli* $\Rightarrow \vee\wedge\varphi\psi\chi\wedge\varphi\psi$, *zapsanou v polské notaci, převeďte do infixové notace.*

Odpověď*:* $((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)$

V souvislosti s problémem správného čtení formulí si všimneme, že každou formuli můžeme reprezentovat graficky, stromem, jehož struktura vyjadřuje *způsob uzávorkování* formule. Například formuli z předešlého cvičení reprezentuje strom na Obr. 1.



Obr. 1

Z tohoto stromu je ihned vidět, že formule má tvar implikace, jejíž první člen je disjunkce sestávající z konjunkce formulí φ a ψ a z formule χ a druhý člen je konjunkce formulí φ a ψ. Prohlížíme-li strom shora dolů (do hloubky) a na dané hladině zleva doprava, dostaneme právě zápis formule v polské notaci.

Někdy se používá i obráceného pohledu, kdy formuli vytváříme odspodu (a opět zleva doprava), takže pro naši formuli dostaneme zápis $\varphi\psi\wedge\chi\vee\varphi\psi\wedge\Rightarrow$, kterému říkáme *obrácená polská notace*. Pozor! Obrácená polská notace formule není zrcadlovým obrazem její polské notace.

Obrácenou polskou notaci používala např. firma Hewlett Packard u některých svých kalkulátorů.

Cvičení 2.3.4 *Převeďte co nejvíce různých formulí v různých notacích do stromové reprezentace a opačně.*

2.4 Tautologie, kontradikce a splnitelné formule

Není obtížné nalézt mezi všemi formulemi výrokové logiky takové, které jsou pravdivé pro každou kombinaci pravdivostních hodnot. Říkáme jim *tautologie*. Příkladem tautologie je formule $\varphi \vee \neg\varphi$, která říká, že φ buď platí nebo neplatí.

Opakem tautologie je *kontradikce*, tj. formule, která není nikdy splnitelná; taková formule je při všech kombinacích pravdivostních hodnot prvotních výroků nepravdivá. Příkladem je formule $\varphi \wedge \neg\varphi$.

Tautologií i kontradikcí je ovšem mnoho, dokonce nekonečně mnoho. To je snadné nahlédnout. Stačí si uvědomit, že když φ je tautologie, tak pro libovolnou formuli ψ je $\varphi \vee \psi$ opět tautologie, a když naopak φ je kontradikce, tak $\varphi \wedge \psi$ je opět kontradikce.

Formulím, které nejsou kontradikce, říkáme *splnitelné* formule. Znamená to, že pro takovou formuli lze nalézt aspoň jednu kombinaci pravdivostních hodnot elementárních výroků, při které je složený výrok pravdivý. Tautologie jsou tedy splnitelné formule, ale ne všechny splnitelné formule jsou tautologie.

Některé tautologie se často používají nejen v samotné výrokové logice, ale i v běžném usuzování, a ty často užívané jsou někdy dokonce označovány jmény. Jsou to většinou tautologie tvaru ekvivalence, které umožňují nahrazovat jedny formule jinými, aniž by se porušila jejich pravdivost. Mezi nejznámější "zákony" výrokové logiky patří např.

$\varphi \Rightarrow \varphi$ (*zákon totožnosti*)

$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$ (*zákon dvojí negace*)

$\varphi \vee \neg\varphi$ (*zákon vyloučeného třetího* - tercium non datur)

$\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (*zákon sporu*)

$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (*de Morganův zákon pro konjunkci*)

$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ (*de Morganův zákon pro disjunkci*)

$(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \psi$ (*zákon Dunse Scota*) kontradice je explozivní

$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi))$ (*zákon ekvivalence*), který říká, že ekvivalenci lze chápat jako oboustrannou implikaci

$(\varphi \wedge (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi)$ (*asociativita konjunkce*)

$(\varphi \vee (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \vee \chi)$ (*asociativita disjunkce*)

$(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ (*distributivita konjunkce*)

$(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ (*distributivita disjunkce*)

$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Leftrightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$ (*distributivita implikace*)

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$ (*zákon kontrapozice*)

$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$ (*hypotetický sylogismus*)

Cvičení 2.4.1 *Odhadněte, které z následujících formulí výrokové logiky jsou tautologie, kontradikce a které jen splnitelné, ale nejsou tautologie. Pak se o tom přesvědčte sestrojením pravdivostní tabulky:*

1. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
2. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$
3. $\neg\neg\psi \Rightarrow \psi$
4. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$
5. $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\neg\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$
6. $(\neg\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$
7. $\neg(\varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \psi))$
8. $(\neg\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\psi \vee \varphi)$
9. $\varphi \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg(\varphi \Rightarrow \psi))$
10. $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \varphi) \Rightarrow \varphi$
11. $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$
12. $((\varphi \Rightarrow \psi) \wedge \varphi) \Rightarrow \psi$
13. $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \psi$

Odpověď: *1., 2., 3., 4., 5., 6., 9., 10., 11., 12. — ano, jsou to tautologie, 7., 8., 13. — ne, jsou splnitelné, ale nikoli tautologie.*

2.4.1 Konjunktivní forma

Nyní si ukážeme, že je ještě jiná, formální cesta, jak o formuli výrokové logiky zjistit, zda je tautologií. Všimneme si nejprve toho, že každou formuli výrokové logiky je možné ekvivalentně přepsat do tzv. *konjunktivní formy.*

Definice 2.4.1 *Řekneme, že daná formule je v* konjunktivní formě*, když má tvar konjunkce konečného počtu disjunkcí, z nichž každá sestává z konečného počtu výrokových proměnných nebo negovaných proměnných.*

Příkladem takové formule je

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3 \vee \neg\varphi_2) \wedge (\neg\varphi_3 \vee \varphi_2 \vee \varphi_3),$$

kde φ_i jsou výrokové proměnné.

Jak ale převedeme formuli do tvaru konjunktivní formy? Na tom není nic těžkého. Ekvivalenci vyjádříme jako konjunkci implikací a implikaci jako disjunkci negace předpokladu a závěru. Požadovaného tvaru dosáhneme vhodnými úpravami získané formule, přitom využijeme zejména de Morganových zákonů a zákonů vzájemné distributivity konjunkce a disjunkce.

Příklad 2.4.1 *Formuli*

$$(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\chi \wedge \neg\psi)$$

přepíšeme do tvaru

$$\neg(\varphi \vee \psi) \vee (\chi \wedge \neg\psi),$$

použijeme de Morganův zákon pro disjunkci:

$$(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\chi \wedge \neg\psi),$$

a s využitím distributivity disjunkce dostaneme požadovaný tvar

$$(\neg\varphi \vee \chi) \wedge \neg\psi.$$

Jak nyní poznáme, že daná formule je tautologií? Celkem snadno. Protože má tvar konjunkce, musí být pravdivý každý její člen. Členy této konjunkce jsou disjunkce. Disjunkce z n členů bude vždy pravdivá (tedy tautologie), když se v ní vyskytne proměnná spolu se svou negací.

Můžeme tedy uzavřít následujícím tvrzením.

Tvrzení 2.4.1 *Formule výrokové logiky v konjunktivní formě je tautologií právě tehdy, když každá z jejích disjunkcí obsahuje nějakou výrokovou proměnnou spolu s její negací.*

Formule uvedená na počátku tohoto odstavce je tedy tautologií; naopak formule z příkladu 2.4.1 tautologií není.

2.4.2 Disjunktivní forma

Podobně, jako jsme zavedli pojem konjunktivní formy, zavedeme teď pojem disjunktivní formy.

Definice 2.4.2 *Řekneme, že daná formule je v* disjunktivní formě*, když má tvar disjunkce konečného počtu konjunkcí, z nichž každá sestává z konečného počtu výrokových proměnných nebo negovaných proměnných.*

Příkladem takové formule je

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg\varphi_3) \vee (\neg\varphi_2 \wedge \varphi_2).$$

A podobně jako jsme ukázali, že každou formuli výrokové logiky je možné ekvivalentně převést do konjunktivní formy, ukážeme, že je možné každou formuli výrokové logiky převést do tvaru disjunktivní formy. Použijeme pro to stejné prostředky jako v případě konjunktivní formy.

Podíváme-li se na příklad 2.4.1 z předchozího odstavce, vidíme, že v předposledním řádku máme formuli v disjunktivní formě.

Jako jsme použili konjunktivní formy ke zjištění, zda je daná formule tautologií, můžeme použít disjunktivní formy pro rozhodnutí, zda je formule kontradikcí.

Mezi všemi disjunktivními formami dané formule má důležitou roli *úplná disjunktivní forma*. Je to taková disjunktivní forma, ve které každý člen disjunkce obsahuje všechny proměnné vyskytující se ve formuli, a tudíž popisuje všechny modely.

Úplnou disjunktivní formu dané formule můžeme snadno získat např. z její pravdivostní tabulky. Všimneme-li si pouze těch řádků v pravdivostní tabulce, v nichž je formule pravdivá, vidíme, že jednotlivými členy disjunkce budou konjunkce, které v daném řádku vzniknou tak, že v případě, kdy výroková proměnná má v řádku tabulky hodnotu *pravda*, objeví se v konjunkci v pozitivním tvaru, v případě, kdy má hodnotu *nepravda*, objeví se v konjunkci v negativním tvaru. Takže např. formule

$$(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\psi,$$

jejíž pravdivostní tabulka je následující

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg\psi$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

bude ekvivalentně vyjádřena úplnou disjunktivní formou ve tvaru

$$(\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi).$$

Cvičení 2.4.2 *Převeďte následující formule do disjunktivní formy:*

1. $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$,
2. $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$,
3. $\neg(\varphi \wedge \psi) \vee \neg(\varphi \vee \psi)$.

Odpověď:

1. $\neg\varphi \vee \neg\psi \vee \chi$,
2. $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$,
3. $\neg\varphi \vee \neg\psi \vee (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$.

2.5 Logický důsledek

V tomto odstavci se budeme zabývat otázkami pravdivosti. Naším cílem bude zkoumat relaci logického důsledku mezi formulemi. Chceme přesně vymezit, co znamená, že formule je důsledkem jiných formulí, neboli, že z jiných formulí vyplývá.

Definice 2.5.1 *Libovolnou neprázdnou množinu formulí výrokové logiky nazveme* teorie.[9]

[9]Mluvíme-li v běžném jazyce o teorii, máme obvykle na mysli znalosti (výroky) nějak systemizované. V logice nebudeme od teorie požadovat nic dalšího než to, že jde o množinu výroků. Jednak je to kratší označení než množina výroků, jednak nás budou zajímat právě jen vztahy logického důsledku.

Budeme se zajímat o ohodnocení elementárních výroků (výrokových proměnných[10]) obsažených ve formulích dané teorie T.

Definice 2.5.2 *Řekneme, že ohodnocení výrokových proměnných vyskytujících se v teorii T je* modelem teorie T, *když pro každou formuli $\varphi \in T$ je její pravdivostní ohodnocení rovno* 1.

Jinými slovy, ohodnocení výrokových proměnných vyskytujících se v teorii T je modelem této teorie, když každá formule $\varphi \in T$ je v něm pravdivá.

Nejjednodušší teorií je teorie obsahující právě jednu formuli. V tomto smyslu můžeme hovořit i o modelech jednotlivých formulí. Pak lze říci, že formule je splnitelná, jestliže existuje její model, je tautologie, jestliže každé ohodnocení výrokových proměnných je jejím modelem, a je kontradikcí, jestliže její model neexistuje.

Příklad 2.5.1 *Nechť φ je výroková proměnná. Snadno ověříme, že pro libovolné ohodnocení je formule*

$$(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$$

pravdivá, a tedy tautologie. Podobně pro libovolné ohodnocení φ je formule

$$(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$$

nepravdivá; tudíž je to kontradikce. Formule

$$\varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$$

je splnitelná (neb pro $val_1(\varphi) = 0$ je pravdivá), ale nikoli tautologie (neb pro $val_2(\varphi) = 1$ je nepravdivá).

Definice 2.5.3 *Řekneme, že teorie T je* bezesporná *(též* konzistentní, splnitelná*), když existuje model této teorie.*

Pojem bezespornosti je snad jedním z nejdůležitějších logických pojmů. V rámci výrokové logiky je velmi jednoduchý. Setkáme se s ním znovu v predikátové logice a bude nás provázet i dalšími kapitolami o neklasických logikách a racionálním usuzování.

Příklad 2.5.2 *Příkladem bezesporné teorie je*

$$T_1 = \{\varphi \vee \neg\psi,\ \varphi \Rightarrow \psi\},$$

[10] Ohodnocení (*valuaci*) výrokových proměnných můžeme chápat jako zobrazení množiny VAR všech proměnných do množiny $\{0, 1\}$ pravdivostních hodnot, tj. $val : VAR \longrightarrow \{0, 1\}$.

kde např. ohodnocení $\varphi = 1, \psi = 1$ *je jejím modelem (obě formule jsou pravdivé), naopak teorie*

$$T_2 = \{\varphi \vee \psi,\ \varphi \Rightarrow \neg\psi,\ \varphi\},$$

model nemá, a tudíž je sporná.

Definice 2.5.4 *Řekneme, že formule* φ *je* logickým důsledkem teorie T *(označení:* $T \models \varphi$*), jestliže každý model teorie* T *je modelem formule* φ*, tzn. že formule* φ *je v něm pravdivá.*

Snadno nahlédneme, že modelem prázdné množiny formulí je libovolné ohodnocení. Proto

$$\models \varphi \text{ právě tehdy, když } \varphi \text{ je tautologií.}$$

Není-li T splnitelná, pak libovolná formule je jejím logickým důsledkem. Příkladem je teorie $T = \{\varphi, \neg\varphi\}$, která je nesplnitelná, a tudíž $\{\varphi, \neg\varphi\} \models \psi$ (pro každé ψ). Když T je nesplnitelná (budeme též říkat, že je *sporná*), tak každá teorie T' obsahující T je také nesplnitelná. Jinými slovy, přidáním formulí k nesplnitelné množině formulí nemůžeme získat splnitelnou množinu formulí. Obráceně, každá část splnitelné teorie je splnitelná.

Příklad 2.5.3 *Nechť* T_1 *a* T_2 *jsou jako v příkladu 2.5.2. Bude nás zajímat, zda je* φ *logickým důsledkem teorie* T_1 *a/nebo* T_2*. Na základě předchozích úvah snadno zjistíme, že* $T_2 \models \varphi$*, protože* T_2 *je sporná. Naopak* φ *není logickým důsledkem teorie* T_1*, protože ohodnocení* $\varphi = 0, \psi = 0$ *je modelem teorie* T_1*, ale nikoli modelem* φ*.*

Lemma 2.5.1 *Nechť* T *je teorie,* φ, ψ *formule. Jestliže* $T \models \varphi \Rightarrow \psi$ *a současně* $T \models \varphi$*, potom* $T \models \psi$*.*

Důkaz: Musíme ověřit, že pro libovolné ohodnocení *val* výrokových proměnných, které je modelem teorie T, platí $val(\psi) = 1$. To je ale zřejmé z tabulky implikace.

Lemma 2.5.2 *Jestliže* φ *je logickým důsledkem množiny formulí* $\{\ \varphi_1, \ldots, \varphi_n\ \}$*, tak i formule* $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \varphi$ *je tautologie.*

Důkaz: Existuje-li takové ohodnocení *val* proměnných $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, že hodnota formule $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \varphi$ je rovna 0, pak musí platit, že hodnota φ je rovna 0 a hodnota formule $(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$ je rovna 1. Taková situace nemůže ale dle předpokladu lemmatu nikdy nastat.

Obě lemmata vážou pojmy tautologie a logického důsledku pro případy teorií s konečně mnoha formulemi. O nekonečných teoriích platí

Tvrzení 2.5.1 *(Věta o kompaktnosti) Teorie T (výrokových formulí) je splnitelná právě tehdy, když každá její konečná podmnožina je splnitelná.*

Důkaz: viz např. [30, Kolář a kol., str. 37-39].

Důsledek: Buďte T množina formulí, φ formule. Potom $T \models \varphi$ právě tehdy, když existuje taková konečná podmnožina T' množiny T, že $T' \models \varphi$.

Jinými slovy, abychom se přesvědčili o tom, že formule je logickým důsledkem (nekonečné) teorie T, stačí najít jednu konečnou podmnožinu T' teorie T, v níž je tato formule pravdivá.

Poznámka 2.5.1 *Tabulková metoda umožňuje pro libovolný výrok (dvouhodnotové výrokové logiky) rozhodnout, zda daný výrok je tautologie či nikoli. Říkáme, že výroková logika je* rozhodnutelná.

2.6 Odvozování formulí výrokové logiky

Jednou z nejvýznamnějších vlastností formulí je možnost z platnosti jedněch formulí usuzovat na platnost jiných formulí. Hlavním cílem logiky je proto zkoumání relace odvoditelnosti mezi formulemi. Představa je taková, že na základě jistých pravidel odvozování, která zaručí, že nás od logicky pravdivých tvrzení povedou zase jen k logicky pravdivým tvrzením (od tautologií k tautologiím), můžeme výchozí formule obohatit o formule takto odvozené. Odvozené formule budeme nazývat *důsledky* výchozích formulí a samozřejmě je budeme používat k dalšímu odvozování.

Ke každé množině formulí tedy přísluší jiná (ve smyslu inkluze větší) množina formulí, kterou chápeme jako její logické důsledky. Budeme teď zkoumat vlastnosti relace odvoditelnosti mezi formulemi a definujeme pojem důkazu a pojem dokazatelnosti. Předtím definujme dva nezbytné pojmy.

Jestliže formule $\varphi \Rightarrow \psi$ je tautologie, říkáme, že formule ψ *logicky vyplývá z* φ. Když ψ vyplývá z φ a současně φ vyplývá z ψ, říkáme, že formule φ a ψ jsou *logicky ekvivalentní.*

2.6.1 Odvozovací pravidla, důkaz, dokazatelnost

O pojmu logického důkazu mívají lidé různé představy. Jednu nesprávnou, ale vtipnou představu z pera Karla Čapka v *Kritice slov* si teď připomeneme. Pak, po precizaci tohoto pojmu ve formálním jazyce, snadno posoudíme, v čem se skvělý literát mýlil a v čem prokázal mimořádnou obratnost při zacházení s jazykem.

> "O logickém důkazu je jediná pravda, že se nic nedá logicky dokázat; což vám dokážu logicky. Buď dokazuji své tvrzení samými evidentními soudy; ale kdyby mé tvrzení plynulo evidentně z evidentních vět, bylo by samo evidentní, a tu by ovšem naprosto nepotřebovalo být dokazováno. Nebo dokazuji své tvrzení větami neevidentními, ale pak bych musel logicky dokazovat všechny tyto věty "usque ad infinitim", ..., z čehož logicky plyne, logický důkaz je nemožný; a není-li tento logický důkaz naprosto přesvědčující, vidíte z toho, že logické dokazování opravdu za nic nestojí."

Začneme tím, že si všimneme, že zřejmě platí (ověřte si na příkladech):

- Když φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ jsou pravdivé, pak i ψ je pravdivá (tzv. *modus ponens*, neboli pravidlo *odloučení*).
- Když φ je tautologie složená z výrokových proměnných $A_1, \ldots, A_n$ a formule ψ vznikne z φ tak, že všechny výskyty výrokových proměnných $A_1, \ldots, A_n$ nahradíme současně výrokovými formulemi $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, pak ψ je tautologie (pravidlo *substituce*).
- Jestliže φ je tautologie a ψ vznikne z φ nahrazením libovolné její podformule[11] formulí s ní ekvivalentní, pak ψ je také tautologie (pravidlo o *nahrazení ekvivalentních podformulí.*)

To znamená, že vyjdeme-li z logicky pravdivých formulí, pak aplikováním těchto tří odvozovacích pravidel dostaneme opět pravdivé formule. To nám umožňuje definovat pojem bezprostředního důsledku a důsledku.

Definice 2.6.1 *Řekneme, že formule φ je* bezprostředním důsledkem *množiny formulí Γ, jestliže vznikne aplikací některého ze tří pravidel odvozování (tj.* modus ponens, substituce *a* nahrazení ekvivalentních podformulí*) na formule z Γ.*

Definice 2.6.2 *Řekneme, že formule φ je* logickým důsledkem *množiny formulí Γ (označení $\Gamma \vdash \varphi$), jestliže $\varphi \in \Gamma$, nebo je bezprostředním důsledkem Γ, anebo bezprostředním důsledkem množiny Γ obohacené o některé její bezprostřední důsledky.*

Povšimněme si, že nejde o definici kruhem, ale o induktivní definici.

[11]Připomeňme, že podformule je taková část formule, která je sama formulí.

Definice 2.6.3 Důkazem *formule φ z možiny Γ rozumíme každou takovou konečnou posloupnost formulí, že poslední je dokazovaná formule φ a každá formule této posloupnosti je bezprostředním důsledkem některých předchozích formulí.*

Je patrné, že pokud pro danou formuli existuje důkaz v Γ, pak takových důkazů existuje více, dokonce nekonečně mnoho.

O formuli, ke které existuje důkaz z množiny Γ, říkáme, že je v Γ *dokazatelná* nebo je dokazatelná z množiny předpokladů Γ.

Při odvozování budeme používat nejen odvozovacích pravidel, ale s výhodou využijeme i formulí, o nichž víme, že jsou tautologiemi výrokové logiky. Těch je ovšem nekonečně mnoho, proto vybereme jen několik (konečný počet), a později ukážeme, že z těch několika lze odvodit dokonce všechny ostatní. Množinu těchto základních formulí označíme Ax a základní tautologie budeme nazývat *axiomy*. Je zajímavé, že vystačíme se třemi axiomy:

Axiom V1 $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

Axiom V2 $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

Axiom V3 $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$

Odvozování z předpokladů Γ pak chápeme jako odvozování z množiny $\Gamma \cup \{Ax\}$. Po této úmluvě můžeme tedy říci, že tautologie jsou všechny formule, které jsou odvoditelné z prázdné množiny předpokladů. Jak takové odvozování provádět, si ukážeme na následujících dvou příkladech.

Příklad 2.6.1 *Dokažte, že* $\vdash A \Rightarrow A$.

Důkaz.

1. *Substitucí formule* $(A \Rightarrow A)$ *za* ψ *a* A *za* φ *do axiomu 1 dostaneme formuli* $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A))$.

2. *Substitucí* A *za* φ, $(A \Rightarrow A)$ *za* ψ *a* A *za* χ *do axiomu 2 dostaneme* $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$.

3. *Aplikujme* modus ponens, *dostaneme závěr, tj. formuli* $((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$.
   Všimněme si, že předpokladem této implikace je axiom 1 při substituci A za φ a A za ψ. Aplikací modus ponens *dostáváme dokazovanou formuli $A \Rightarrow A$.*

Příklad 2.6.2 *Dokažte, že* $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \vdash A \Rightarrow C$.

Důkaz.

1. $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \vdash B \Rightarrow C$ *(druhý předpoklad),*
2. $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ *(jestliže $B \Rightarrow C$ platí vždy, pak i za předpokladu A),*
3. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ *(axiom 2 při substituci A za φ, B za ψ a C za χ),*
4. $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ *(aplikace* modus ponens *na 2 a 3),*
5. $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \vdash A \Rightarrow B$ *(první předpoklad),*
6. $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \vdash A \Rightarrow C$ *(aplikace* modus ponens *na 4 a 5).*

2.7 Axiomatická výstavba výrokové logiky

Vraťme se k axiomům výrokové logiky. Z toho, co jsme dosud řekli, je zřejmé, že díky korektnosti odvozovacích pravidel z axiomů odvodíme logicky pravdivé formule. Otázkou zůstává, zda z nich odvodíme všechny logicky pravdivé formule, popř. zda existují jiné množiny formulí, které by bylo možno považovat za axiomy výrokové logiky. Pokud od axiomů požadujeme, aby z nich byly odvoditelné právě jen logicky pravdivé formule, je odpověď jednoduchá. Pokud ale např. požadujeme, aby množina axiomů byla minimální v tom smyslu, že žádný axiom není zbytečný (takové vlastnosti systému axiomů říkáme *nezávislost*), pak musíme ověřit, že žádný z axiomů není dokazatelný z ostatních. [12]

Začneme např. axiomatickým systémem, který definuje vzájemné vztahy pěti základních výrokových spojek (vz např. [21]).

[12] Pokud by z nich byl dokazatelný, nezahrnuli bychom jej mezi axiomy.

$$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$$

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$$

$$(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$$

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\varphi \Leftrightarrow \psi))$$

$$(\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\psi \vee \varphi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\psi \wedge \varphi)$$

$$\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$$

$$(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$$

$$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi))$$

$$((\varphi \Rightarrow \chi) \wedge (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \vee \psi) \Rightarrow \chi)$$

$$(\varphi \Rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)) \Rightarrow \neg\varphi$$

$$(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \psi$$

$$\varphi \vee \neg\varphi$$

Tento systém axiomů je možné poněkud redukovat, uvědomíme-li si, že vystačíme se dvěmi spojkami, jmenovitě se spojkami *negace* a *implikace*. Pak nalezneme např. jiný axiomatický systém, který bude předcházejícímu ekvivalentní, tzn. každá formule z jednoho systému axiomů je dokazatelná z druhého, a naopak každá formule z druhého systému je dokazatelná z prvního, samozřejmě s využitím definičních rovností mezi spojkami.

Další systém axiomů:

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$$

$$(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$$

$$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$$

$$(\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$$

$$\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$$

I tento systém axiomů můžeme dále redukovat na pouhé tři axiomy. Dostaneme tak třeba systém našich původních tří axiomů.

Je zřejmé, že lze nalézat další a další ekvivalentní axiomatické systémy výrokové logiky.

Cvičení 2.7.1 *Přesvědčte se detailně, že tři výše uvedené axiomatické systémy výrokové logiky jsou navzájem ekvivalentní.*

K efektivnímu provádění důkazů nám navíc dobře poslouží několik následujících důležitých tvrzení, o jejichž platnosti není obtížné se přesvědčit a která často používáme nejen v deduktivních disciplínách (viz např. [30]):

Tvrzení 2.7.1 *(Věta o dedukci) Nechť T je teorie, φ a ψ jsou formule. Potom $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ právě tehdy, když $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.*

Důkaz.

Implikace zleva doprava je přímým důsledkem *modus ponens*. Implikace opačná, zprava doleva, se dokáže indukcí podle délky důkazu: Nechť posloupnost formulí $d_1, \ldots, d_n$ je důkazem formule ψ z množiny $T \cup \{\varphi\}$. Potom pro libovolnou formuli d_i je

$$T \vdash \varphi \Rightarrow d_i \text{ pro } (i \leq n).$$

Stačí rozlišit tyto případy:

- d_i je axiom, pak $\vdash \varphi \Rightarrow d_i$,
- $d_i \in T$, pak $T \vdash \varphi \Rightarrow d_i$,
- $d_i = \varphi$, pak $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ a indukcí pro $d_j \Rightarrow d_i$.

Tvrzení 2.7.2 *(Důkaz rozborem případů) $T \cup \{\varphi \vee \psi\} \vdash \chi$ právě tehdy, když současně $T \cup \{\varphi\} \vdash \chi$ a $T \cup \{\psi\} \vdash \chi$.*

Tvrzení 2.7.3 *(Věta o neutrální formuli) Jestliže $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ a $T \cup \{\neg\varphi\} \vdash \psi$, potom $T \vdash \psi$.*

Na následujících příkladech si ukážeme, jak lze při odvozování využít větu o dedukci.

Příklad 2.7.1 *Dokažte, že $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.*

Důkaz.

1. $\vdash \neg A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(substituce $\neg A$ za φ, $\neg B$ za ψ do axiomu 1),*
2. $\{\neg A\} \vdash (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(věta o dedukci na 1),*
3. $\{\neg A\} \vdash (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ *(axiom 3 při substituci A za φ a B za ψ),*
4. $\{\neg A\} \vdash (A \Rightarrow B)$ *(aplikace* modus ponens *na 2 a 3),*
5. $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ *(věta o dedukci na 4).*

Příklad 2.7.2 *Dokažte, že* $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$.

Důkaz.

1. $\vdash \neg\neg A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A)$ *(substituce $\neg A$ za A, $\neg\neg\neg A$ za B do formule z př. 2.7.1),*
2. $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A) \Rightarrow (\neg\neg A \Rightarrow A)$ *(axiom 3 při substituci A za ψ, $\neg\neg A$ za φ),*
3. $\{\neg\neg A\} \vdash \neg A \Rightarrow \neg\neg\neg A$ *(věta o dedukci na 1),*
4. $\{\neg\neg A\} \vdash \neg\neg A \Rightarrow A$ *(aplikace* modus ponens *na 2 a 3),*
5. $\{\neg\neg A\} \vdash A$ *(věta o dedukci na 4),*
6. $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$ *(věta o dedukci na 5).*

Příklad 2.7.3 *Dokažte, že* $\vdash B \Rightarrow \neg\neg B$.

Důkaz. *Z axiomu 3 a z formule z příkladu 2.7.2 substitucí $\neg B$ za A a aplikací* modus ponens.

Příklad 2.7.4 *Dokažte, že* $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Důkaz.

1. $A \Rightarrow B, \neg\neg A \vdash A$
2. $A \Rightarrow B, \neg\neg A \vdash B$ *(*modus ponens *na 1 a na předpoklad $A \Rightarrow B$),*

3. $A \Rightarrow B, \neg\neg A \vdash \neg\neg B$ *(viz příklad 2.7.3),*

4. $A \Rightarrow B \vdash \neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B$ *(věta o dedukci na 3),*

5. $A \Rightarrow B \vdash (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(modus ponens na 4 a axiom 3 při substituci* $\neg B$ *za* φ *a* $\neg A$ *za* ψ*),*

6. $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(věta o dedukci na 5).*

Příklad 2.7.5 *Dokažte, že* $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$.

Důkaz.

1. $\{A, A \Rightarrow B\} \vdash B$ *(*modus ponens *na předpoklady),*

2. $\{A\} \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ *(věta o dedukci na 1),*

3. $\vdash A \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ *(věta o dedukci na 2).*

Cvičení 2.7.2 *Přesvědčte se, že platí*

1. $\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash \psi$ *(ze sporných předpokladů je odvoditelné cokoliv);*

2. $T \vdash \varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$ *právě když* $T \vdash \psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$ *(ve složené implikaci nezáleží na pořadí antecedentů (předpokladů));*

3. $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\} \vdash \psi$ *právě tehdy, když* $\vdash (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$.

2.8 Vlastnosti výrokové logiky

V odstavci 2.4 jsme již poznali, že výroková logika je rozhodnutelná, tj. existuje algoritmus, který o libovolné formuli rozhodne, zda je tautologií či nikoli.

Teď si ještě ukážeme, že je korektní, úplná a bezesporná.

2.8.1 Korektnost, úplnost a bezespornost výrokové logiky

Definice 2.8.1 *Řekneme, že formální systém výrokové logiky je* korektní*, když každá formule dokazatelná z axiomů je tautologií.*

Definice 2.8.2 *Řekneme, že formální systém výrokové logiky je* úplný*, když každá tautologie je dokazatelná z axiomů.*

Přesvědčit se o korektnosti výrokové logiky je snadné, redukuje se na korektnost odvozovacích pravidel.

Abychom se přesvědčili o úplnosti výrokové logiky, dokážeme nejprve pomocné tvrzení, pro které je někdy používán název *Churchovo lemma*. Pro větší přehlednost zavedeme nejprve následující označení: Pro každou formuli φ a pravdivostní ohodnocení proměnných bude výraz φ^{val} znamenat formuli φ, když $val(\varphi) = 1$, a bude znamenat formuli $\neg\varphi$, když $val(\varphi) = 0$. Po této úmluvě nahlédneme indukcí podle složitosti konstrukce formule, že platí

Tvrzení 2.8.1 *(Churchovo lemma) Jestliže $V_1, \ldots, V_n$ jsou všechny výrokové proměnné vyskytující se ve formuli φ, potom pro každé ohodnocení val platí*

$$\{V_1^{val}, \ldots, V_n^{val}\} \vdash \varphi^{val}.$$

Abychom objasnili možná příliš formální terminologii, ilustrujeme Churchovo lemma příkladem: Jestliže $\varphi = A \wedge \neg B$, pak $\{A, \neg B\} \vdash A \wedge \neg B$.

S využitím Churchova lemmatu nahlédneme úplnost výrokové logiky, tj.

Tvrzení 2.8.2 *(Postova věta) Pro libovolnou formuli výrokové logiky φ platí $\vdash \varphi$ právě tehdy, když $\models \varphi$.*

Korektnost a úplnost můžeme tedy shrnout v konstatování, že ve výrokové logice vyplývání a odvoditelnost splývají v jedno, tj. že každá dokazatelná formule je logicky pravdivá a naopak i každá logicky pravdivá formule je dokazatelná.

Definice 2.8.3 *Formální systém výrokové logiky nazveme* bezesporný*, když neexistuje taková formule φ, že $\vdash \varphi$ a současně $\vdash \neg\varphi$.*

To, že výroková logika je bezesporná, je ale zřejmé, protože kdyby platilo $\vdash \varphi$ i $\vdash \neg\varphi$ tak by, vzhledem ke korektnosti výrokové logiky, byly obě formule tautologiemi. To ale není možné, neboť neexistuje žádné pravdivostní ohodnocení val, pro které by platilo $val(\varphi) = val(\neg\varphi) = 1$.

Teď už jsme připraveni vyslovit a dokázat nejdůležitější tvrzení o vztahu logického důsledku a formální (syntaktické) dokazatelnosti ve výrokové logice:

Tvrzení 2.8.3 *(Úplnost)*

1. *Teorie T je bezesporná právě tehdy, když je splnitelná.*

2. *Pro libovolnou teorii T a pro libovolnou výrokovou formuli φ platí:*
$$T \vdash \varphi \text{ právě tehdy, když } T \models \varphi.$$

Důkaz.

Ad 1. Když T je bezesporná, pak je bezesporná každá její konečná část, a tudíž i splnitelná. Když je T sporná, tak existuje její nesplnitelná konečná část a tudíž i T je nesplnitelná.

Ad 2. Když $T \vdash \varphi$, pak existuje taková konečná podmnožina $T_0 \subseteq T$, že $T_0 \vdash \varphi$ a podle Postovy věty $T_0 \models \varphi$, a tudíž i $T \models \varphi$. Když není pravda, že $T \vdash \varphi$, pak v teorii $T \cup \{\neg\varphi\}$ není dokazatelná formule φ, a tedy $T \cup \{\neg\varphi\}$ je bezesporná, a tudíž i splnitelná, takže nemůže být $T \models \varphi$.

Dosavadní poznatky o výrokové logice lze pak shrnout do konstatování, že výroková logika je

- **korektní**,
- **bezesporná**,
- **úplná**,
- **rozhodnutelná**.

Na závěr této kapitoly ještě uvedeme několik kontrolních cvičení.

Cvičení 2.8.1

1. *Vyjádřete dvěma různými způsoby, co znamená, že teorie je bezesporná?*

   Odpověď*: Je splnitelná, tzn., že má aspoň jeden model.*
   Neexistuje v ní (není z ní odvoditelná) taková dvojice formulí, že jedna je negací druhé.

2. *Existuje výrok (ve výrokové logice) odvoditelný z libovolného výroku?*

   Odpověď: *Ano. Je to každá tautologie.*

3. *Které z následujících výrazů nejsou správně utvořenými formulemi výrokové logiky? Proč?*

   a) $(((\psi \Leftrightarrow \varphi)))$

   b) $(\psi_1 \Rightarrow (\psi_2 \Rightarrow (\psi_3 \Rightarrow (\psi_4 \Rightarrow (\psi_5 \Rightarrow \varphi)))))$

   c) $(\neg(\vee\varphi \wedge \psi))$

   Odpověď: *c).*

4. *Rozhodněte, které dvojice formulí jsou ekvivalentní. Naznačte důvod.*

   a) $\neg\neg\neg(\varphi \vee \psi)$, $\neg\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

   b) $\neg(\neg(\varphi \wedge \psi))$, $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$

   c) $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi))$, $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi))$

   Odpověď: *a) ano (de Morganův zákon pro disjunkci), b) ano (de Morganův zákon pro konjunkci), c) ne (první formule je tautologie, zatímco druhá nikoli).*

5. *Je pravda, že každá nedokazatelná formule výrokové logiky je nepravdivá?*

   Odpověď: *Ano, plyne to z Postovy věty.*

6. *Je pravda, že pro každou formuli φ výrokové logiky platí, že když φ není dokazatelná z axiomů výrokové logiky, tak formule $\neg\varphi$ je dokazatelná?*

   Odpověď: *Nikoli. Dokazatelné jsou právě tautologie, takže když formule není dokazatelná, tak je to buď formule splnitelná (ale nikoli tautologie) anebo kontradikce. Negace takové formule sice může být tautologie (šlo-li původně o kontradikci), ale může to být formule, která je jen splnitelná.*

7. *Formuli $(\neg(\chi \Rightarrow \neg\psi) \wedge \neg\chi)$ zapište v prefixové notaci.*

   Odpověď: $\wedge\neg \Rightarrow \chi\neg\psi\neg\chi$.

8. *Vyznačte, které z následujících formulí výrokové logiky jsou kontradikce.*

   a) $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

   b) $\psi \wedge \neg\psi$

   c) $\neg\varphi \vee \varphi$

   Odpověď: *a), b).*

9. *Uveďte alespoň dvě různé množiny funkčně úplných booleovských spojek.*

   Odpověď*:* $\{\neg, \Rightarrow\}, \{\neg, \wedge\}, \{\neg, \vee\}, \{ifthenelse, true, false\}$ *a další.*

10. *Které z následujících formulí výrokové logiky jsou tautologie a které nikoli?*

    a) $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \Rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$

    b) $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \neg(\neg\varphi \vee \psi)$

    c) $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$

    d) $\neg\varphi \vee \varphi$

    e) $\varphi \wedge \neg\varphi$

    f) $(\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

    g) $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$

    h) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

    i) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi)$

    j) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi)$

    k) $(\varphi \Leftrightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\psi)$

    l) $\neg(\varphi \Rightarrow \neg\varphi)$

    m) $\neg(\neg\varphi \Rightarrow \varphi)$

    Odpověď*: a), c), d), f), g), j), k) jsou tautologie.*

11. *Nechť* φ, ψ *jsou formule výrokové logiky. Která z následujících tvrzení jsou pravdivá?*

    a) Když φ *je tautologie, tak* $\neg\varphi$ *je kontradikce.*

    b) Když φ *není splnitelná, tak* $\neg\varphi$ *je tautologie.*

    c) Když φ *je kontradikce a* ψ *je tautologie, tak* $\varphi \vee \psi$ *je tautologie.*

    d) Když $\neg\varphi$ *není splnitelná, tak* φ *je kontradikce.*

    Odpověď*: a), b), c).*

12. *Co lze říci o vzájemné dokazatelnosti následujících formulí výrokové logiky?*

    (a) $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

    (b) $\neg\varphi \vee \psi$

    (c) $\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$

    (d) $\neg(\neg\psi \wedge \varphi)$

    Odpověď*: Všechny tyto formule jsou navzájem ekvivalentní, neboť každá z nich je ekvivalentní formuli* $\varphi \Rightarrow \psi$*.*

13. *Je teorie T, která se skládá ze čtyř formulí z předchozího příkladu, bezesporná?*

    Odpověď: *Ano, protože formule $\varphi \Rightarrow \psi$ je splnitelná.*

14. *Je pravda, že každý výrok implikuje alespoň jeden výrok?*

    Odpověď: *Jistě. Pro každý výrok φ např. platí, že φ implikuje φ.*

15. *Nechť A, B jsou výrokové proměnné. Rozhodněte, která z následujících teorií je bezesporná*

    a) $T_1 = \{A,\ A \vee \neg B,\ \neg B\}$

    b) $T_2 = \{A \wedge B,\ \neg B,\ A \vee \neg C\}$

    c) $T_3 =$ *množina všech formulí výrokové logiky.*

    d) $T_4 = \{A \Rightarrow B,\ \neg B,\ A\}$

    e) $T_5 = \emptyset$

    Odpověď: *a). (e) vyžaduje komentář: T_5 není teorie — podle definice 2.5.1; kdybychom připustili, že teorií může být i prázdná množina výroků, pak je T_5 bezesporná).*

16. *Nechť $T = \{A,\ A \Rightarrow B,\ B \vee C,\ C \Rightarrow D,\ \neg D\}$ je teorie, kde A, B, C, D jsou opět výrokové proměnné. Rozhodněte, zda platí*

    a) $T \vdash B$

    b) $T \vdash C$

    c) $T \vdash (B \vee D)$

    d) $T \cup \{C\}$ *je bezesporná.*

    Odpověď: *a), c) — ano, platí, b), d) — ne, neplatí.*

17. *Nalezněte model (udělení pravdivostních hodnot), v němž je formule*

    $(\varphi \vee \chi) \Rightarrow (\psi \vee \chi)$

    pravdivá a jiné udělení hodnot, v němž je nepravdivá.

    Odpověď: *Pro $\varphi = 1, \psi = \chi = 0$ je nepravdivá, pro všechna ostatní ohodnocení je pravdivá.*

18. *Je pravda, že z premis (předpokladů) $A \Rightarrow B, \neg(B \wedge C)$ a C vyplývá závěr $\neg C$?*

    Odpověď: *Nikoli. Je pouze jedno přidělení hodnot výrokům A, B a C, při kterém jsou všechny tři premisy (předpoklady) současně pravdivé, tj. $A = 0$, $B = 0$ a $C = 1$. Pak ale výrok $\neg C$ není pravdivý.*

19. *Nechť A, B jsou pravdivé výroky. Jakou vlastnost musí mít formule φ výrokové logiky, pro niž platí:*

    $\vdash \varphi \Rightarrow A \ \vee \neg B$

    a současně

    $\vdash \varphi \Rightarrow A \ \wedge B$ *?*

    Odpověď*: Formule φ může být libovolná, protože pro A a B pravdivé jsou i výroky $A \vee \neg B$ i $A \wedge B$ pravdivé, takže předpokladem implikace, jejíž závěr je pravdivý, může být cokoli.*

20. *Je možné plně mechanizovat dokazování ve výrokové logikce? Proč?*

21. *Která z následujících pravidel odvozování (ve výrokové logice) jsou korektní?*

    a) $\frac{A \vee B}{B}$

    b) $\frac{A \Leftarrow B, B}{A}$

    c) $\frac{\neg A, B}{A \Rightarrow B}$

    d) $\frac{A \Rightarrow B, B \Leftarrow A}{A \Leftrightarrow B}$

    e) $\frac{A}{A \vee B}$

    f) $\frac{A \wedge B}{B}$

    g) $\frac{A \Rightarrow B, \neg B}{\neg A}$

    h) $\frac{A \Rightarrow B, A \ \Rightarrow \neg B}{\neg B}$

    i) $\frac{\neg A \ \Rightarrow B, \neg A \ \Rightarrow \neg B}{\neg A}$

    j) $\frac{\neg A \ \vee B, A}{B}$

    k) $\frac{\neg A, A}{B}$

    l) $\frac{A \vee \neg A}{B}$

    m) $\frac{A \vee B, A \ \Rightarrow B}{B \Rightarrow C}$

    n) $\frac{A \vee B, A \ \Rightarrow B}{C \Rightarrow \neg B}$

    o) $\frac{A \vee B, A \ \Rightarrow B}{C \Rightarrow B}$

    p) $\frac{A \vee B, A \ \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow C}$

    Odpověď*: a) ne (pro $A = 1, B = 0$), b) ano (modus ponens), c) ano, d) ne (pro $A = 0, B = 1$), e) ano, f) ano, g) ano, h) ne (pro $A = 0, B = 1$; k orektním závěrem by např. byl výrok $\neg A$), i) ano (modus tollens), j) ano (jiná formulace* *pravidla modus ponens), k) ano (premisy nemohou být současně pravdivé, takže podle definice korektnosti není třeba pravdivost závěru zkoumat), l) ne (jediná premisa je splněna vždy, takže i závěr by musel být vždy pravdivý), m) ne (z platnosti premis vyplývá, že B musí být pravdivé, a tedy i C), n) ne (z platnosti premis vyplývá, že B musí být pravdivé, a tedy C nepravdivé), o) ano (z platnosti premis vyplývá, že B musí být pravdivé, C tedy může být jakékoli), p) ano (stejné argumenty jako v případě o)).*

Kapitola 3

Predikátová logika

V předcházející kapitole, věnované výrokové logice, jsme probírali vlastnosti výroků jako celků, nezkoumali jsme jejich vnitřní výstavbu. Nyní si všimneme blíže právě této vnitřní výstavby našich výpovědí. Budeme mj. analyzovat výrazy tvaru

objekt x má vlastnost P,

objekty x, y jsou v relaci R

a takové časté obraty jako

všechny objekty mají vlastnost P,

existuje objekt, který má vlastnost P

apod. Tyto a podobné výrazy vypovídají o množství objektů, které mají, či nemají, danou vlastnost — kvantifikují — a proto je nazýváme *kvantifikátory.* [1]

Abychom blíže porozuměli roli kvantifikátorů v logice, probereme nejprve vyjadřovací prostředky predikátové logiky, tj. definujeme její jazyk. Jazyk predikátové logiky bude jistě bohatší než jazyk výrokové logiky, protože bude navíc obsahovat jména různých objektů uvažované struktury a jména relací mezi těmito objekty. Jména relací nazýváme *predikáty.* Znamená to, že popisujeme nějakou strukturu, která sestává z individuí a relací mezi těmito individui.

[1] Výrazů typu kvantifikátorů používáme v přirozeném jazyce více. Jsou to např. číselné kvantifikátory jako *existují dva* objekty, které mají vlastnost P, *existují tři* objekty s vlastností P, ... atd. Patří k nim ale i méně určité kvantifikátory jako *skoro všechny* objekty, *mnoho*, *málo*, *několik* apod.

3.1 Jazyk predikátové logiky

Jazyk predikátové logiky bude bohatší než jazyk výrokové logiky. Bude obsahovat vyjadřovací prostředky, které mám umožní rozlišovat jednotlivé objekty (individua), u individuí vlastnosti a vztahy mezi individui. Začneme základními symboly.

Definice 3.1.1 *Základními symboly jazyka predikátové logiky budou:*

1. *individuové proměnné, které budeme označovat symboly $x, y, z, \ldots$, popřípadě opatřenými indexy;*
2. *predikátové symboly $P, Q, R, \ldots$, rovněž případně opatřené indexy;*
3. *konstanty $a, b, c, \ldots$, popř. s indexy;*
4. *funkční symboly $f, g, h, \ldots$, popř. s indexy;*
5. *logické symboly $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists$.*

To vyžaduje komentář. Především, podobně jako ve výrokové logice, proměnných bude nekonečně (spočetně) mnoho. Jejich role je však odlišná, tentokrát neodkazují k výrokům, ale k jednotlivým objektům popisovaného světa — k *individuím*. Hledisko predikátové logiky, brýle jimiž se logik dívá na svět, určuje, že svět sestává z jednotlivých objektů — individuí —, které mají různé vlastnosti a nacházejí se v různých vztazích. V predikátové logice nás zajímají právě tato individua a vztahy mezi nimi, proto i vyjadřovací prostředky jazyka musejí obsahovat symboly pro jejich popis. Predikátové symboly slouží jako *jména relací* mezi individui, popř. (jde-li o jednomístné predikáty) jako *jména vlastností* individuí. Každému predikátu je přiřazeno přirozené číslo vyjadřující jeho *árnost*, tj. počet argumentů, které spojuje. Tak např. ve výrazu

$$O(k, v)$$

který můžeme např. interpretovat tak, že symbol O označuje relaci *otcovství*, k je konstantní symbol označující konkrétní individuum Karla IV., v konstantní symbol označující Václava IV. Symbol O je zde predikátovým symbolem spojujícím dva argumenty (v našem případě konstanty k a v). Říkáme, že symbol O je zde *binárním* (dvoumístným) predikátovým symbolem. Ve výrazu

$$S(2, 3, 5)$$

je symbol S *ternárním* (trojmístným) predikátovým symbolem. Můžeme jej interpretovat např. jako predikát, který říká, že třetí argument je součtem prvního a druhého argumentu.

Predikátových symbolů bude v jazyce ovšem vždy jen konečně mnoho. Konečně mnoho bude i konstant, které hrají roli vlastních jmen individuí. Konečně mnoho bude i funkčních symbolů. Příkladem konstanty v jazyce jsou např. vlastní jména Petr, Pavel, ale třeba i jména čísel v matematice, tj. číslice 2, 3, 5 apod. Konstanty odkazují vždy ke konkrétním individuím. K tvorbě jmen individuí ovšem slouží i *funkční* symboly. To známe dobře z matematiky, kde např. funkční symbol sin v kombinaci s konstantou π a pomocnými symboly umožňuje vytvořit výraz $sin(\pi)$, což je jméno individua (čísla), o němž matematik ví, že je to číslo, které jindy označuje konstantou 0.

To nás vede k následující induktivní definici *termu*, neboli jména individua.

Definice 3.1.2 *(Termy)*

1. *Proměnné a konstanty jsou* termy.
2. *Jestliže f je funkční symbol a $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak i výraz $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term.*
3. *Žádné jiné termy nejsou.*

Ze symbolů jazyka predikátové logiky a termů a popř. i z pomocných symbolů, jako jsou závorky a oddělovače, tvoříme atomické formule takto:

Definice 3.1.3 *(Atomické formule)*

1. *Jestliže P je n-místný predikátový symbol, $t_1, \ldots, t_n$ jsou termy, pak výraz tvaru $P(t_1, \ldots, t_n)$ se nazývá* atomická formule.
2. *Žádné jiné atomické formule nejsou.* [2]

Na základě atomických formulí definujeme pojem *formule* predikátové logiky takto:

Definice 3.1.4 *(Formule)*

1. *Každá atomická formule je formule.*
2. *Když φ, ψ jsou formule, x je proměnná, potom výrazy $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$, $\varphi \Leftrightarrow \psi$, $(\forall x)\varphi$ a výraz $(\exists x)\varphi$ jsou formule (popř. s pomocnými symboly pro usnadnění čtení).*

[2] Jestliže do našeho jazyka patří i rovnost a t_1, t_2 jsou proměnné nebo konstanty, pak výraz $t_1 = t_2$ je atomická formule.

3. *Žádné jiné formule než ty, které vzniknou podle těchto pravidel, nejsou.*

To znamená, že třída všech formulí je nejmenší třída všech výrazů splňujících 1. a 2.

Příklad. Výrazy $(\forall x)(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall x)\varphi)$, $(\exists x)(\forall x)\varphi \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\psi$ jsou formule predikátové logiky, zatímco výraz $(\forall x)\varphi \Rightarrow$ není formule predikátové logiky, neboť není sestaven podle pravidel tvorby formulí (nemá rozumný smysl).

Cvičení 3.1.1 *Pomocí vyjadřovacích prostředků predikátové logiky zapište tyto výroky přirozeného jazyka:*

1. *Každý ředitel má aspoň jednoho podřízeného zaměstnance.*
2. *Není na světě člověk ten, který by se zalíbil lidem všem.*
3. *Není pravda, že žádný člen vedení podniku není zároveň majitel obligací a akcionář.*
4. *Funkce f je spojitá v bodě a.* (Návod: To, že funkce je v bodě a spojitá znamená, že ke každému okolí bodu *f(a)* existuje takové okolí bodu a, že pro všechna x z okolí bodu a hodnota *f(x)* padne do okolí bodu $f(a)$.)
5. *Funkce f má v bodě a limitu c.*
6. *V každém městě je radnice, v některých obcích radnice není.*
7. *Existuje město, kam vedou všecky cesty. Jmenuje se Řím.*
8. *Jestliže všichni učitelé jsou nároční a žádný student nepracuje pilně, pak někteří učitelé jsou frustrováni.*

Odpověď*:*

1. $\forall x \exists y (R(x) \Rightarrow P(y,x))$, *kde* $R(x)$ *znamená, že* x je ředitel *a* $P(y,x)$ *znamená, že* y *podřízeným zaměstnancem osoby* x.
2. $\neg\exists x \forall y ((C(x) \wedge C(y)) \Rightarrow L(x,y))$, *neboli* $\forall x \exists y (C(x) \wedge C(y) \wedge \neg L(x,y))$,
3. $\neg\neg\exists x (V(x) \wedge O(x) \wedge A(x))$,
4. $\forall o_{f(a)} \exists o_a \forall x (P(x, o_a) \Rightarrow P(f(x), o_{f(a)}))$
5. $\forall o_c \exists o_a \forall x (P(x, o_a) \wedge \neg x = a) \Rightarrow P(f(x), o_c))$

6. $\forall x(M(x) \Rightarrow R(x)) \wedge \exists x(O(x) \wedge \neg R(x))$
7. $\exists x \forall y((M(x) \wedge C(y)) \Rightarrow V(y,x))$
8. $(\forall x(U(x) \Rightarrow N(x)) \wedge \forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))) \Rightarrow \exists x(U(x) \wedge F(x))$,
   nebo jinak
   $(\forall x(U(x) \Rightarrow N(x)) \wedge \neg \exists x(S(x) \wedge P(x))) \Rightarrow \exists x(U(x) \wedge F(x))$

Cvičení 3.1.2 *Nechť $K(x)$ znamená, že x je kočka, $M(x)$ znamená, že x je myš a $L(x,y)$ znamená, že x loví y. Vyjádřetes co nejlepší českou stylistikou formule*

1. $\forall x(K(x) \Rightarrow \neg M(x))$,
2. $\exists x(K(x) \wedge \neg L(x,y) \wedge M(y))$.

Odpověď*: 1. Kočka není myš. (Kočky nejsou myši.) 2. Některé kočky neloví myši.*

Cvičení 3.1.3 *Formulí prvního řádu (s rovností) vyjádřete, že existuje/existují*

1. *alespoň jedno*
2. *alespoň dvě*
3. *alespoň tři*
4. *nejvýše jedno*
5. *nejvýše dvě*
6. *nejvýše tři*
7. *právě jedno*
8. *právě dvě*
9. *právě tři*

individuum/individua s vlastností F.

Odpověď*:*

1. $\exists x F(x)$
2. $\exists x \exists y(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg(x = y))$

3. $\exists x \exists y \exists z\ (F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$

4. $\exists x \forall y (F(y) \Rightarrow (x = y)) \vee \neg \exists x F(x)$

5. $\exists x \exists y \forall z\ (F(z) \Rightarrow ((x = z) \vee (y = z))) \vee \neg \exists x F(x)$

6. $\exists x \exists y \exists z\ \forall w (F(w) \Rightarrow ((x = w) \vee (y = w) \vee (z\ = w))) \vee \neg \exists x F(x)$

7. $\exists x \forall y (F(x) \wedge (\neg(x = y) \Rightarrow \neg F(y)))$

8. $\exists x \exists y \forall z\ (F(x) \wedge F(y) \wedge \neg(x = y) \wedge ((\neg(x = z) \wedge \neg(y = z)) \Rightarrow \neg F(z)))$

9. $\exists x \exists y \exists z\ \forall w (F(x) \wedge F(y) \wedge F(z) \wedge \neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z) \wedge ((\neg(x = w) \wedge \neg(y = w) \wedge \neg(z, w)) \Rightarrow \neg F(w)))$

V dalším budeme potřebovat rozlišit proměnné, které jsou *vázány* kvantifikátory, a proměnné, které jsou mimo dosah kvantifikátorů v dané formuli.

Definice 3.1.5 *Řekneme, že výskyt proměnné x ve formuli φ je* vázaný, *když je výskytem ve formuli tvaru $(\forall x)\psi$ nebo $(\exists x)\psi$. Proměnná x je* vázaná *ve formuli, má-li v ní vázaný výskyt. Jinak je* volná. *Formule φ je* uzavřená, *když neobsahuje volné proměnné. Formule φ je* otevřená, *když neobsahuje vázané proměnné.*

Příklad 3.1.1 *Ve formuli $\forall x P(x)$ je x vázaná proměnná a celá formule je tedy uzavřená. Naproti tomu ve formuli $(\forall x)P(y)$ je y volná proměnná a x je v této formuli vázaná. Formule $(\forall x)P(y)$ tedy není uzavřená, ale také není otevřená.*

Ve formuli $\forall x(P(x) \wedge R(y))$ je proměnná x vázaná a proměnná y volná.

Ve formuli $\exists x \forall y P(x, y)$ jsou obě proměnné x i y vázané.

Formule $P(a) \vee P(b)$, kde a, b jsou konstanty, neobsahuje žádné proměnné (ani volné), a je tudíž uzavřená, stejně jako formule $(\forall x)P(x)$ obsahující pouze vázanou proměnnou x.

Vraťme se ještě k samotným symbolům jazyka predikátové logiky a porovnejme jazyk predikátové logiky s jazykem výrokové logiky.

Jazyk predikátové logiky je bohatší. To je triviální zjištění. Je důležitější si všimnout toho, že jazyk výrokové logiky je jen jeden, zatímco jazyků predikátové logiky je mnoho. To záleží na tom, jak vybereme množiny predikátových symbolů, konstant a funkčních symbolů. Je nyní zřejmé, že má smysl mluvit o tom, že jeden jazyk je rozšířením jiného jazyka predikátové logiky.

3.2 Splňování a pravdivost

Prozatím jsme popisovali jen formální stránku jazyka predikátové logiky bez ohledu na významy jednotlivých predikátů a konstant ve formulích. Přejděme tedy od tohoto syntaktického popisu k otázkám sémantickým.

Budeme se starat o to, jaké *významy* lze přiřadit konstantám a predikátům ve výrazech predikátové logiky, a na základě hodnot proměnných zjišťovat pravdivostní hodnoty některých formulí. Pro tento účel bude třeba říci něco o relačních strukturách. Základním pojmem pro relační struktury je pojem relace, proto bude následující odstavec věnován relacím.

3.2.1 Relace a jejich vlastnosti

Binární relací R mezi množinami M, N rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $M \times N$. Tedy $R \subseteq M \times N$. Dva prvky x, y jsou v relaci R, když $[x, y] \in R$. V takovém případě píšeme $R(x, y)$ nebo také xRy. Jestliže $M = N$, říkáme stručně, že R je binární relace na M.

Tento pojem můžeme zobecnit následovně: *n-ární relací na M* rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu M^n. Pak hovoříme o binárních relacích, když $n = 2$, o ternárních relacích, když $n = 3$, atd.

Nás však budou zajímat především binární relace a jejich vlastnosti.

Definice 3.2.1 *Řekneme, že binární relace R je*

reflexivní*, když*

$$\forall x \, R(x, x),$$

ireflexivní*, když*

$$\forall x \, \neg R(x, x),$$

totální *(též* univerzální*), když*

$$\forall x \forall y \, R(x, y),$$

prázdná*, když*

$$\forall x \forall y \, \neg R(x, y),$$

pořadová *(též* seriální*), když*

$$\forall x \exists y \, R(x, y),$$

symetrická, *když*

$$\forall x \forall y\ (R(x,y) \Rightarrow R(y,x)),$$

antisymetrická, *když*

$$\forall x \forall y\ (R(x,y) \Rightarrow \neg R(y,x)),$$

dichotomická *(též* souvislá*), když*

$$\forall x \forall y\ (R(x,y) \vee \neg R(y,x)),$$

tranzitivní, *když*

$$\forall x \forall y \forall z\ \ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z)),$$

intranzitivní, *když*

$$\forall x \forall y \forall z\ \ ((R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow \neg R(x,z)),$$

eukleidovská, *když*

$$\forall x \forall y \forall z\ \ ((R(x,y) \wedge R(x,z)) \Rightarrow \neg R(y,z)),$$

slabě hustá, *když*

$$\forall x \forall y\ (R(x,y) \Rightarrow \exists z\ (R(x,z) \wedge R(z,y))).$$

Definice 3.2.2 *Relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní nazveme* ekvivalence.

Podrobnější výklad týkající se relací nalezne čtenář v dodatku těchto skript.

Cvičení 3.2.1 *Ukažte, že*

1. *každá totální relace je symetrická, dichotomická, tranzitivní a eukleidovská;*
2. *každá dichotomická relace je reflexivní;*
3. *každá prázdná relace je symetrická, antisymetrická, tranzitivní, intranzitivní, eukleidovská a slabě hustá;*
4. *každá symetrická tranzitivní relace je eukleidovská;*
5. *každá reflexivní eukleidovská relace je symetrická;*

6. *každá intranzitivní relace je ireflexivní.*

Cvičení 3.2.2 *Nalezněte příklad relace, která je*

1. *reflexivní a tranzitivní,*
2. *ireflexivní a tranzitivní,*
3. *symetrická a tranzitivní,*
4. *antisymetrická a tranzitivní,*
5. *reflexivní a symetrická,*
6. *symetrická, reflexivní a tranzitivní (ekvivalence),*
7. *reflexivní a eukleidovská,*
8. *souvislá ekvivalence,*
9. *ekvivalence, která není souvislá.*

3.2.2 Relační struktury

Teď zavedeme sémantický pojem relační struktury, který bude sloužit jako interpretace teorie v jazyce prvního řádu.

Definice 3.2.3 Relační strukturou $\mathcal{M}$ *rozumíme libovolnou neprázdnou množinu* M *spolu s konečným počtem operací a relací na* M*. Množinu* M *nazýváme obvykle* nosič *struktury* $\mathcal{M}$.

Příkladem jednoduché relační struktury je libovolná neprázdná množina s částečným uspořádáním svých prvků. Nosičem struktury je ona množina, částečné uspořádání jejích prvků je jedinou binární relací v této struktuře.

Jiným příkladem zajímavé a pro logiku důležité relační struktury je *Booleova algebra* na dané množině. Protože její význam pro logiku je značný, věnujeme jí samostatný odstavec.

Definice 3.2.4 *Relační strukturou pro jazyk* $\mathcal{J}$ *rozumíme libovolnou relační strukturu* $\mathcal{M}$ *s nosičem* M*, v níž každému* n*-árnímu predikátovému symbolu z jazyka* $\mathcal{J}$ *odpovídá* n*-ární relace, každému* n*-árnímu funkčnímu symbolu odpovídá zobrazení* n*-tic prvků z* M *do* M *a každé konstantě z jazyka* $\mathcal{J}$ *odpovídá prvek z množiny* M*.*

Relační strukturu pro jazyk $\mathcal{J}$ někdy nazýváme též *interpretace* jazyka $\mathcal{J}$ (viz dále).

3.2.3 Booleovy algebry

Algebrou rozumíme libovolnou neprázdnou množinu spolu s konečným počtem operací definovaných na této množině.

Nejprve definujeme o něco jednodušší relační strukturu, která se obvykle nazývá *svaz.*

Definice 3.2.5 Svaz $\mathcal{S}$ *na množině* S *je algebra se dvěma binárními operacemi* spojení a průseku *(označení:* $\cup, \cap$*), které splňují následující podmínky: Pro každé* $a, b, c \in S$

1. $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$
2. $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$
3. $a \cup b = b \cup a$
4. $a \cap b = b \cap a$
5. $(a \cup b) \cap a = a$
6. $(a \cap b) \cup a = a$

Svaz nazveme *distributivní*, když pro všechna $a, b, c \in S$ navíc platí

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c).$$

Svaz nazveme *komplementární*, když existují takové dva různé prvky $0, 1 \in S$, že ke každému prvku $a \in S$ existuje takový prvek $\bar{a} \in S$, že

$$a \cap \bar{a} = 0 \quad \text{a} \quad a \cup \bar{a} = 1.$$

Prvek $\bar{a}$ pak nazýváme *komplement* prvku a.

Definice 3.2.6 *Svaz, který je distributivní a komplementární, se nazývá* Booleova algebra.

Booleovu algebru můžeme ovšem definovat i přímo. Booleova algebra je algebra se dvěma binárními operacemi spojení a průseku, s jednou unární operací komplementu a dvěma vytčenými prvky (nulovým a jednotkovým), které splňují shora uvedené podmínky.

Důležitým příkladem Booleovy algebry je potenční množina $\mathcal{P}(M)$ [3] libovolné neprázdné množiny M, kde průsek odpovídá množinovému průniku, spojení odpovídá

[3] Potenční množinou $\mathcal{P}(M)$ množiny M rozumíme množinu všech podmnožin množiny M. Připomeňme, že potenční množina n-prvkové množiny má 2^n prvků. Když např. $M = \{a, b\}$, tak $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

sjednocení a komplement množinovému doplňku, nulový prvek odpovídá prázdné množině a jednotkový prvek odpovídá množině M.

Poznamenejme ještě, že pojem Booleovy algebry můžeme definovat také jako strukturu $\mathcal{B} = [B, \leq]$ s částečným uspořádáním $\leq$ definovaným na nosiči B struktury $\mathcal{B}$, když spojení resp. průsek dvou prvků z B definujeme rovnostmi:

$$a \cup b = b, \text{ když } a \leq b,$$

$$a \cap b = a, \text{ když } a \leq b.$$

Říkáme, že částečné uspořádání $\leq$ generuje na množině B Booleovu algebru.

3.2.4 Interpretace

Dosud pro nás byly výrazy predikátové logiky pouze formálními zápisy bez bližšího významu. Abychom mohli rozhodnout, zda daná formule predikátové logiky je pravdivá či nepravdivá, musíme nejprve *interpretovat* základní termíny (predikátové symboly, funkční symboly, jsou-li jaké, a konstanty) a formule jazyka. Tato interpretace by přitom měla mít tu vlastnost, že se dá jednoznačně rozšířit do interpretace všech (i odvozených) termínů a formulí jazyka v dané struktuře. Znamená to tedy, že všem výrazům jazyka postupně přiřazujeme objekty konstruované z prvků dané struktury, kterou chceme pomocí uvažovaného jazyka popsat a zkoumat. Tento proces interpretace formulí nyní popíšeme podrobněji.

Nechť je dán jazyk $\mathcal{J}$ predikátové logiky, tj. seznam konstant, funkčních a predikátových symbolů.

Nechť $\mathcal{M}$ je interpretace jazyka $\mathcal{J}$. Zobrazení (valuace) $val : \mathrm{VAR} \mapsto M$ všech individuových proměnných do univerza M, tj. do nosiče struktury $\mathcal{M}$, nazveme *ohodnocení proměnných v dané struktuře.* Znamená to, že každé proměnné přiřadíme určitý prvek z množiny M.

Toto ohodnocení lze pak jednoznačným způsobem rozšířit na všechny termy jazyka.

Jestliže $\mathcal{M}$ je interpretace jazyka $\mathcal{J}$, val je ohodnocení proměnných prvky nosiče struktury $\mathcal{M}$, pak řekneme, že formule φ je *pravdivá v* $\mathcal{M}$ *pro ohodnocení val* (označení: $\mathcal{M} \models \varphi[val]$), když platí:

1. Jsou-li $t_1, \ldots, t_n$ termy jazyka, P je n-ární predikátový symbol, pak

   $\mathcal{M} \models P(t_1, \ldots, t_n)[val]$ právě tehdy, když $[t_1[val], \ldots, t_n[val]] \in P_{\mathcal{M}}$, kde $P_{\mathcal{M}}$ je n-ární relace na množině M.

2. Je-li φ formule, pak $\mathcal{M} \models \neg\varphi[val]$, právě když neplatí $\mathcal{M} \models \varphi[val]$.

3. Jsou-li φ a ψ formule, pak $\mathcal{M} \models (\varphi \Rightarrow \psi)[val]$, právě když neplatí $\mathcal{M} \models \varphi[val]$ nebo platí $\mathcal{M} \models \psi[val]$. Jinými slovy, v případě, že platí $\mathcal{M} \models \varphi[val]$, tak platí i $\mathcal{M} \models \psi[val]$.

4. Je-li x proměnná, φ formule, pak $\mathcal{M} \models \exists x\varphi[val]$, právě když pro nějaké individuum $m \in M$ platí $\mathcal{M} \models \varphi[val(x/m)]$.

Definice 3.2.7 *Řekneme, že formule* φ je pravdivá ve struktuře $\mathcal{M}$ *(označení:* $\mathcal{M} \models \varphi$*), jestliže pro každé ohodnocení val je* $\mathcal{M} \models \varphi[val]$.

Příklad 3.2.1 *Nechť* φ *je atomická formule*

$$\varphi = P(x)$$

a nechť $\mathcal{M} = (M, S)$ *je relační struktura, kde* M *je množina přirozených čísel a* S *unární relace (= vlastnost)* býti sudým číslem. *Jestliže* $val : VAR \to M$ *je definováno předpisem* $val(x) = 2$, *pak*

$$\mathcal{M} \models \varphi[val]$$

(neboli formule φ *je pravdivá v* $\mathcal{M}$ *pro ohodnocení val), ale neplatí*

$$\mathcal{M} \models \varphi$$

(čili formule φ *není pravdivá ve struktuře* $\mathcal{M}$*). Snadno totiž nahlédneme, že např. pro* $val_1(x) = 3$, *není* φ *pravdivá v* $\mathcal{M}$.

Všimněme si, že platí

$$\mathcal{M} \models \varphi, \text{ právě když } \mathcal{M} \models (\forall x)\varphi.$$

Po této přípravě nás nepřekvapí tato definice:

Definice 3.2.8 *Formule* φ*, která je pravdivá v každé struktuře* $\mathcal{M}$*, se nazývá* logicky pravdivá *nebo též* tautologie. *(Označení:* $\models \varphi$*).*

Příklad 3.2.2 *Formule*

$$\varphi = \forall x(P(x) \vee Q(x)),$$

je pravdivá ve struktuře $\mathcal{M} = (M, S, L)$*, kde* M *je opět množina přirozených čísel,* S *vlastnost* býti sudým číslem *a* L *vlastnost* býti lichým číslem. *Skutečně, každé přirozené číslo je buď sudé nebo liché. Formule však není logicky pravdivá, např. v relační struktuře* $\mathcal{M} = (M, S, T)$*, kde* M *a* S *jsou jako na začátku tohoto příkladu a* T *je vlastnost* býti dělitelný třemi, *pravdivá není.*

Tautologie výrokové logiky jsou též tautologiemi logiky predikátové — je však třeba si uvědomit, že jde o výrokové formule nad formulemi predikátové logiky. Dalšími významnými tautologiemi jsou:

$$\neg\forall x\varphi \Leftrightarrow \exists x\neg\varphi,$$

$$\neg\exists x\varphi \Leftrightarrow \forall x\neg\varphi.$$

Cvičení 3.2.3 *1. Nechť F a G jsou jednomístné predikáty, R je dvoumístný predikát a a konstanta. Pro každou z následujících formulí nalezněte interpretaci, která ukazuje, že to NENÍ tautologie; tj. interpretaci, v níž je formule nepravdivá:*

a) $\forall x(F(a) \Rightarrow F(x))$

b) $\forall x(F(x) \Rightarrow F(a))$

c) $(\exists x F(x)) \Rightarrow F(a)$

d) $F(a) \Rightarrow \forall x F(x)$

e) $\exists x F(x) \Rightarrow \forall x F(x)$

f) $\exists x \exists y R(x,y) \Rightarrow \exists x R(x,x)$

g) $\forall x(F(x) \vee G(x)) \Rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x G(x))$

h) $(\exists x F(x) \wedge \exists x G(x)) \Rightarrow \exists x(F(x) \wedge G(x))$

i) $\forall x(F(x) \Rightarrow G(x)) \Rightarrow \exists x(F(x) \wedge G(x))$

j) $(\forall x F(x) \Rightarrow \forall x G(x)) \Rightarrow \forall x(F(x) \Rightarrow G(x))$

2. Buď φ libovolná formule predikátové logiky, χ formule neobsahující x jako volnou proměnnou. Přesvědčte se, že následující formule jsou tautologie predikátové logiky:

a) $(\forall x)(\chi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\chi \Rightarrow (\forall x)\varphi)$

b) $(\forall x)\varphi \Rightarrow (\exists x)\varphi$

c) $(\forall x)\varphi \Rightarrow \neg(\exists x)\neg\varphi$

3. Nalezením modelu prokažte, že následující množiny formulí jsou splnitelné:

a) $\{\exists x F(x),\ \exists x \neg F(x)\}$*;*

b) $\{\forall x(F(x) \Rightarrow G(x)),\ \forall x(F(x) \Rightarrow \neg G(x)\}$*.*

3.3 Odvozování v predikátové logice

Podobně jako ve výrokové logice, budeme se nyní zabývat relací odvoditelnosti mezi formulemi predikátové logiky. To, co již známe z výrokové logiky, samozřejmě s výhodou využijeme.

3.3.1 Axiomatizace predikátové logiky

Podobně jako ve výrokové logice, budeme se i v predikátové logice zabývat problémem axiomatizace. Axiomatický systém predikátové logiky bude v jistém smyslu rozšířením axiomatického systému výrokové logiky. To znamená, že bude sestávat z axiomů výrokové logiky [4], k nimž přidáme dva axiomy, které se týkají kvantifikátorů:

Axiom P4 $\forall x\varphi \Rightarrow \varphi(x/t)$, kde t je konstanta anebo proměnná, která není volná v žádné podformuli formule φ (*schéma specifikace*)

Axiom P5 $\forall x(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \forall x\psi)$, pokud x není volná ve φ (*distributivnost obecného kvantifikátoru vůči implikaci*)

Odvozovacími pravidly budou pravidla výrokové logiky (*modus ponens*, *substituce* a *nahrazení ekvivalentních podformulí*, a další pravidlo *generalizace*, podle kterého z formule φ pro libovolnou proměnnou x odvodíme formuli $\forall x\varphi$.

Cvičení 3.3.1 *Rozhodněte, zda platí*

1. $F(a) \vdash \exists x F(x)$,
2. $\exists x F(x) \vdash F(a)$,
3. $\forall x F(x) \vdash F(a)$,
4. $F(a) \vdash \forall x F(x)$,
5. $\vdash \forall x(F(x) \vee \neg F(x))$,
6. $\vdash \forall x \neg(F(x) \Rightarrow \neg F(x))$,
7. $\forall x \neg F(x) \vdash \neg \forall x F(x)$,
8. $\neg \exists x \neg F(x) \vdash \forall x F(x)$.

Odpověď*: 1., 3., 5., 7., 8. — ano, 2., 4., 6. — ne.*

Cvičení 3.3.2 *Otázka k zamyšlení. Vysvětlete v čem jsou následující úsudky chybné.*

1. *Madelain Albrightová se narodila v Československu. Československo neexistuje. Tudíž: Madelain Albrightová neexistuje.*

[4] Musíme si být ale stále vědomi toho, že jde o výrokové formule nad formulemi predikátové logiky.

2. *Čerti jsou v pekle. Peklo neexistuje. Tudíž: Čerti neexistují.*

3. *Čerti jsou v pohádkách. Je hodně pohádek. Tudíž: Je hodně čertů.*

Odpověď: Existence v těchto příkladech neznamená vždy kvantifikaci, jde spíše o predikát.

Cvičení 3.3.3 *Sylogismy. Které z následujících úsudků jsou korektní?*

1. *Všichni aritmetici jsou matematici.*
   Někteří logikové jsou matematici.
   Tudíž
   Někteří logikové jsou aritmetici.

2. *Žádné motocykly nejsou automobily.*
   Všechny motocykly jsou rychlá vozidla.
   Tudíž
   Některá rychlá vozidla nejsou automobily.

3. *Žádný lékárník není právník.*
   Někteří učitelé jsou právníci.
   Tudíž
   Někteří učitelé nejsou lékárníci.

4. *Někteří politikové jsou vzdělaní.*
   Někteří právníci nejsou politikové.
   Tudíž
   Někteří právníci nejsou vzdělaní.

5. *Někteří Švédové jsou protestanti.*
   Někteří protestanti nejsou Švédové.
   Tudíž
   Někteří Švédové nejsou protestanti.

Odpověď*: 2., 3. ano, 1., 4., 5. ne.*

3.3.2 Vlastnosti predikátové logiky

Stejně jako ve výrokové logice, klademe si i v predikátové logice otázku, zda formální systém predikátové logiky má podobné vlastnosti jako systém výrokové logiky, tj. ptáme se, zda je korektní, bezesporný, úplný, rozhodnutelný apod.

Na základě toho, co už o predikátové logice víme, je možné nahlédnout, že formální systém predikátové logiky je

- **korektní**
- **bezesporný**
- **úplný**

Na rozdíl od výrokové logiky je predikátová logika obecně *nerozhodnutelná*, tj. neexistuje obecný algoritmus, který by pro každou formuli rozhodoval, zda je tautologií, kontradikcí, anebo jen splnitelná, ale nikoli tautologií. Jak uvidíme v dalším textu, rozhodnutelné jsou pouze jisté fragmenty predikátové logiky obsahující jen určité typy formulí.

3.4 Automatické dokazování

V tomto odstavci se budeme snažit odpovědět na otázku, zda se dokazování v predikátové logice dá mechanizovat, a tedy přenechat stroji. Ještě před tím ale musíme věnovat svoji pozornost dvěma pojmům (a s nimi spojeným procedurám), které pro nás budou velmi užitečné při úpravě formulí do tvaru vhodného pro automatické dokazování.

3.4.1 Prenexní normální forma a Skolemovy funkce

Nejprve si všimneme toho, že každou formuli predikátové logiky lze přepsat do tvaru, v němž formule začíná všemi kvantifikátory, které se v ní vyskytují, a ty jsou následovány bezkvantifikátorovou částí. K tomu nám poslouží následující definice.

Definice 3.4.1 *(Prenexní normální forma) Řekneme, že formule φ je v* prenexní normální formě*, jestliže má tvar*

$$\mathbf{Q_1}x_1, \ldots, \mathbf{Q_n}x_n\psi,$$

kde symbol $\mathbf{Q_i}$ zastupuje obecný nebo existenční kvantifikátor, x_i je proměnná a ψ je formule neobsahující žádné kvantifikátory.

O formulích predikátové logiky platí, že ke každé formuli φ lze sestrojit formuli φ' v prenexní normální formě tak, že

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi',$$

což snadno ověříme indukcí podle složitosti formule φ.

Obvyklý postup při hledání prenexního normálního tvaru formule je tento:

1. Nejprve se zbavíme zbytečných kvantifikátorů.
2. Přejmenujeme proměnné tak, aby všechny kvantifikátory vázaly různé proměnné a žádná proměnná přitom ve formuli nebyla současně volnou i vázanou proměnnou.
3. Eliminujeme spojku ekvivalence podle schematu $A \Leftrightarrow B \ldots (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
4. Negaci přesuneme dovnitř a kvantifikátory doleva podle schemat
   $\neg(\forall x \varphi) \ldots \exists x \neg \varphi$
   $\neg(\varphi \Rightarrow \psi) \ldots \varphi \wedge \neg \psi$
   $\neg(\varphi \vee \psi) \ldots (\neg \varphi \wedge \neg \psi)$
   $\neg(\varphi \wedge \psi) \ldots (\neg \varphi \vee \neg \psi)$
   $\neg\neg \varphi \ldots \varphi$
   a pokud x se nevyskytuje ve formuli ψ
   $(\mathbf{Q} x \varphi) \vee \psi \ldots \mathbf{Q} x(\varphi \vee \psi)$
   $(\mathbf{Q} x \varphi) \wedge \psi \ldots \mathbf{Q} x(\varphi \wedge \psi)$
   $(\mathbf{Q} x \varphi) \Rightarrow \psi \ldots \mathbf{Q} x(\varphi \Rightarrow \psi)$
   $\psi \Rightarrow \mathbf{Q} x \varphi \ldots (\mathbf{Q} x(\psi \Rightarrow \varphi))$,
   kde $\mathbf{Q}$ opět označuje jeden z kvantifikátorů $\forall, \exists$.

Příklad 3.4.1 *Formuli* $\forall x P(x) \Rightarrow (\exists y Q(y) \vee \exists x R(x))$ *upravíme postupně takto:*

$\forall x P(x) \Rightarrow (\exists y Q(y) \vee \exists z\ R(z))$

$\forall x P(x) \Rightarrow (\exists y \exists z\ (Q(y) \vee R(z)))$

$\forall x (P(x) \Rightarrow \exists y \exists z\ (Q(y) \vee R(z)))$

$\forall x \exists y \exists z\ (P(x) \Rightarrow (Q(y) \vee R(z)))$

Cvičení 3.4.1 *Nalezněte prenexní normální formu formulí*

1. $\forall x P(x, y) \Rightarrow \exists x(Q(x) \vee R(y, z))$
2. $\forall x(\exists y P(x, y) \Rightarrow \exists x R(y, z)) \Rightarrow \forall x Q(x, y)$

3. $\exists x \forall y (P(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x,x))$

Odpověď:

1. $\forall x \exists w P(x,y) \Rightarrow ((Q(w) \vee R(y,z))$,

2. $\forall x \exists y \forall w (P(x,y) \Rightarrow R(v,z)) \Rightarrow Q(w,v)$,

3. $\exists x \forall y \exists z\ (P(x,y) \Rightarrow Q(z,z))$,

Pro účely automatizace procesu dokazování bude navíc vhodné odstranit v prenexní normální formě všechny existenční kvantifikárory. Tím dostaneme generálně uzavřenou formuli, takže se pak soustředíme pouze na bezkvantifikátorovou část formule. Existenčních kvantifikátorů se zbavíme metodou, kterou navrhl norský logik Thoralf Skolem. Metoda byla po něm nazvána *skolemizací*.

Jestliže tedy formule má tvar

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y P(x_1, \dots, x_n, y),$$

pak podmínku pro existenci objektu y můžeme chápat jako podmínku existence zobrazení f, které pro dané hodnoty proměnných $x_1, \dots, x_n$ vybere požadovanou hodnotu proměnné y. Původní formuli s existenčním kvantifikátorem tedy můžeme nahradit formulí

$$\forall x_1 \dots \forall x_n P(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)).$$

V případě, že formule začíná existenčním kvantifikátorem, je věc snadná. Pro existující y zvolíme nějaké dosud nepoužité jméno — konstantu.

Cvičení 3.4.2 *Nalezněte generální uzávěr formulí ze cvičení 3.4.1.*

Odpověď:

1. $\forall x P(x,y) \Rightarrow ((Q(f(x)) \vee R(y,z))$,

2. $\forall x \forall w (P(x,f(x)) \Rightarrow R(v,z)) \Rightarrow Q(w,v)$,

3. $\forall y (P(a,y) \Rightarrow Q(f(y),f(y)))$.

3.4.2 Automatické dokazování — klauzule

Již jsme dobře poznali, že klasická odvozovací pravidla jsou pro strojové dokazování zcela nevhodná. Budeme proto hledat jinou cestu, a k tomu využijeme *princip vyvracení*, který formulujeme takto:

Tvrzení 3.4.1 *Uzavřená formule φ vyplývá z teorie T právě tehdy, když $T \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná neboli kontradiktorická.*

Metoda odvozování bude tedy spočívat v tom, že místo toho, abychom hledali přímý důkaz formule, budeme se snažit vyvrátit negaci dokazované formule. K tomu bude výhodné všechny formule, s nimiž budeme pracovat, nejprve převést do tvaru, který je lépe přizpůsobený strojovému dokazování. Takový tvar formule budeme nazývat *klauzulární* a formuli v klauzulárním tvaru nazveme *klauzulí*.

Definice 3.4.2 Klauzule *je literál nebo disjunkce literálů.* Literál *je atomická formule nebo její negace. Mezi klauzule z dobrých technických důvodů řadíme i* prázdnou klauzuli*, kterou obvykle značíme symbolem* $\Box$.

Příkladem klauzulí jsou formule:

$$\neg P(f(x), a)$$

$$Q(g(x, y)) \vee P(x, y)$$

Jak získáme klauzulární tvar formule?

1. Formuli nejprve převedeme do prenexní nomální formy, tj. do tvaru kdy všechny kvantifikátory jsou na začátku formule (prefix), který je následován bezkvantifikátorovou částí (maticí).
2. Vytvoříme disjunktivní tvar matice, což je znalost založená na výrokové logice.
3. Skolemizací eliminujeme existenční kvantifikátory. (Formuli $\exists x \forall y P(x, y)$ nahradíme formulí $\forall y P(a, y)$ a formuli $\forall y \exists x P(x, y)$ nahradíme formulí $\forall y P(f(y), y)$. Skolemova funkce zde přímo reprezentuje objekt, o jehož existenci mluví původní formule.)
4. Vynecháme obecné kvantifikátory.

Pro libovolnou množinu K klauzulí teď definujeme *Herbrandovo*[5] *univerzum* nad jazykem množiny klauzulí K, které poslouží jako model.

Definice 3.4.3 *Nechť K je množina klauzulí.* Herbrandovo univerzum $\mathcal{H}(K)$ *je množina výrazů, která obsahuje:*

1. *Všechny individuální konstanty z K.*
2. *Jestliže termy $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{H}(K)$, potom pro každou n-ární funkci $f \in K$ je term $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{H}(K)$.*
3. *Jiné prvky v $\mathcal{H}(K)$ nejsou.*

Poznamenejme, že do Herbrandova univerza vstoupí i symboly, které se do K dostaly v podobě Skolemových funkcí. Protože se Herbrandovo univerzum skládá z termů, je obvykle nekonečné, pouze tehdy, kdy jazyk neobsahuje žádné funkční symboly, je počet prvků univerza konečný, neboť počet konstant jazyka je vždy (podle definice) konečný.

Důležitým tvrzením pro automatizované dokazování je následující věta.

Tvrzení 3.4.2 *(Herbrandova věta) Množina formulí v klauzulárním tvaru je nesplnitelná právě tehdy, když existuje konečná množina základních jejích klauzulí, která je logicky sporná.*

Příklad 3.4.2 *Nechť* $T = \{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall y(P(f(y))\}$, $\phi = \forall y(Q(f(y)))$. *Otázkou je, zda platí $T \vdash \phi$.*

K tomu je třeba dokázat nesplnitelnost množiny

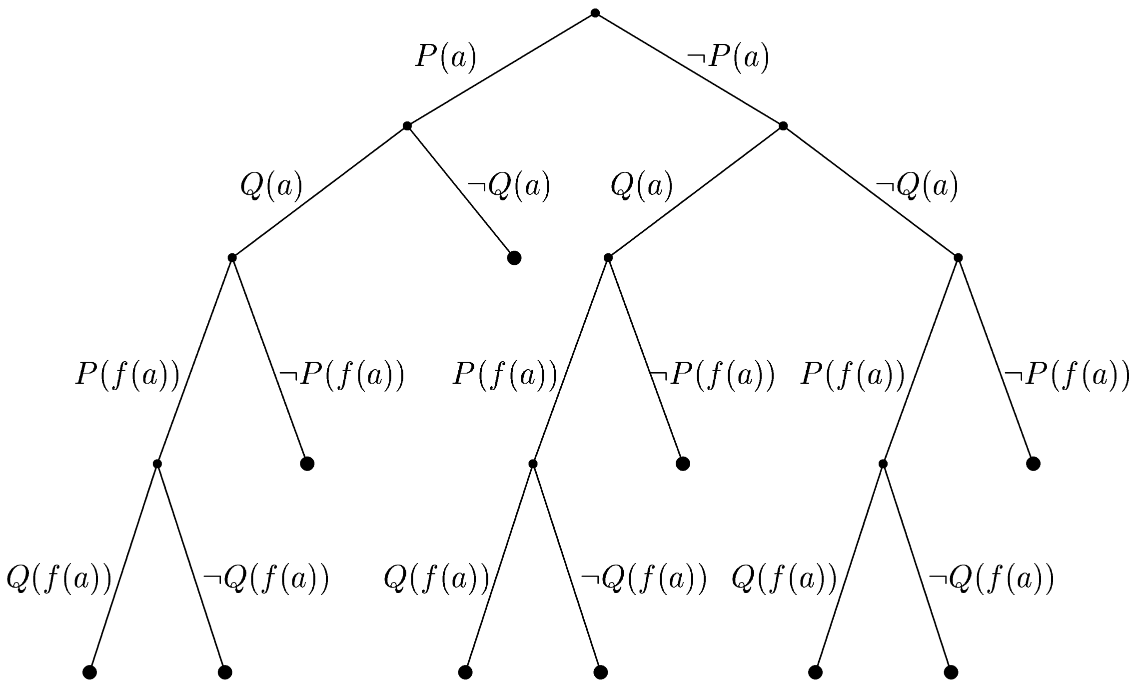
$$K = \{\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)), \forall y(P(f(y))), \neg\forall y Q(f(y))\}.$$

Třetí formuli z množiny K můžeme ekvivalentně přepsat na formuli $\exists y \neg Q(f(y))$ a dále, použitím Skolemovy konstanty na formuli $\neg Q(f(a))$. Klauzulární tvar množiny K pak bude následující

$$\{\neg P(x) \vee Q(x), P(f(y)), \neg Q(f(a))\ \}$$

a Herbrandovým univerzem bude nekonečná množina obsahující termy $\{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$. *Z Herbrandova univerza množiny K a z predikátů P, Q užitých ve formulích množiny K, vytvoříme* sémantický strom *pro množinu K:*

[5] Herbrand byl francouzský logik, jehož výsledky ze třicátých let byly významným příspěvkem k úvahám o možnostech automatického dokazování formulí.



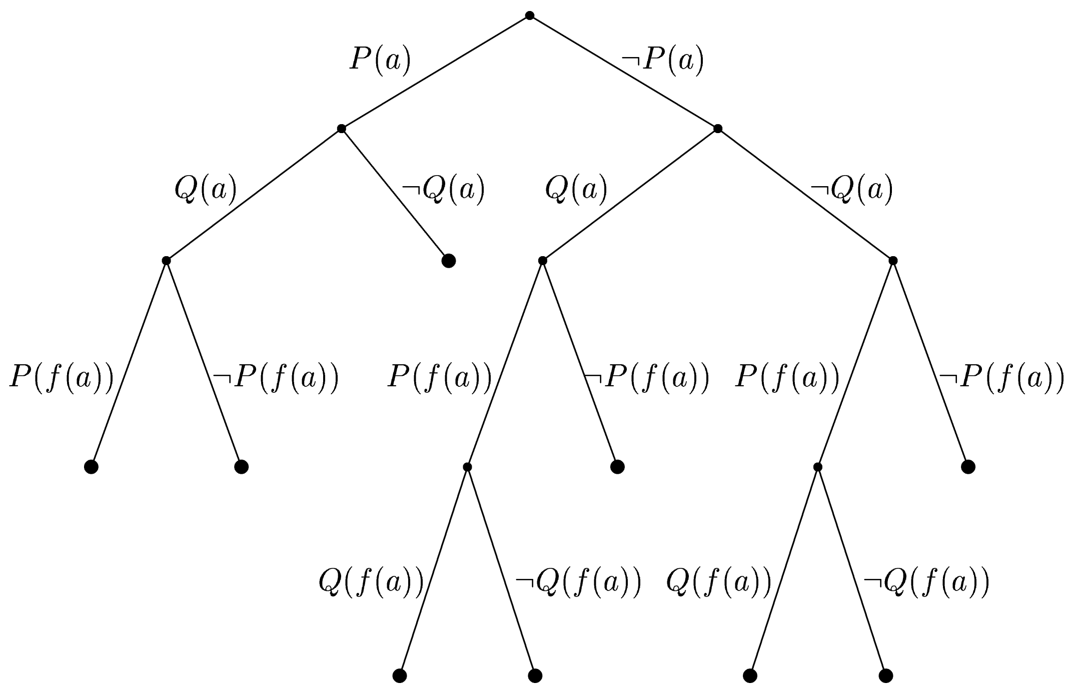
Obrázek 3.1: Sémantický strom

Takto vytvořený sémantický strom je však velmi složitý, proto byly hledány jiné, výpočtově jednodušší, metody. V roce 1965 J. A. Robinson [54] nalezl metodu, která byla nazvána *rezoluční metodou*[6] a kterou podrobněji popíšeme v následujícím odstavci.

3.4.3 Rezoluční metoda odvozování

Idea rezolučního odvozování spočívá v tom, že k původním klauzulím budeme vhodným způsobem přidávat i odvozené klauzule, a tím urychlovat výpočet. Nejprve ji vyložíme na jednoduchém příkladu. Předpokládejme, že množina formulí (klauzule) $\{\neg P(x), Q(x)\}$ je splněna v interpretaci i. Pak v téže interpretaci je splněna každá její instance, a tudíž i klauzule $\{\neg P(f(a)), Q(f(a))\}$. Avšak literál $Q(f(a))$ nemůže být splněn současně s třetí klauzulí $\{\neg Q(f(a))\}$, a tudíž musí být splněn literál $\neg P(f(a))$, a proto jej můžeme přidat k našim třem výchozím klauzulím.

Znovu vytvoříme sémantický strom,



Obrázek 3.2: Nový sémantický strom

ze kterého ihned vidíme, že spor byl nalezen o jednu úroveň výše.

[6]Název metody je odvozen z angl. *resolution*, což zde lze přeložit slovy *nové řešení*.

Odvození lze znázornit schematem:

$$\frac{\neg P(x) \vee Q(x), \quad \neg Q(f(a))}{\neg P(f(a))}$$

Klauzuli $\neg P(f(a))$ nazýváme *rezolventou* dvou horních klauzulí. Rezoluční pravidlo tak kombinuje *substituci*, *modus ponens* a různé druhy tautologií.

Příklad 3.4.3 *Množina čtyř klauzulí*

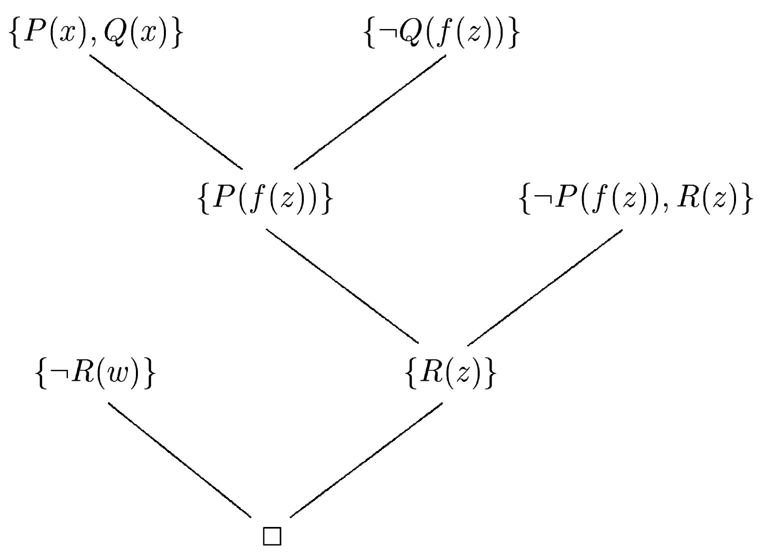
$\{P(x), Q(x)\}$,

$\{\neg Q(f(z))\}$,

$\{\neg P(f(z)), R(z)\}$,

$\{\neg R(w)\}$

je nesplnitelná, jak je patrno z Obr. 3.3.



Obrázek 3.3: Rezoluční strategie

Příklad 3.4.4 *(viz [14]) Vyjdeme z těchto pěti tvrzení o zločinech, zločinnosti a zločincích:*

1. *Každý zločin je někým spáchán.*
2. *Pouze zločinci páchají zločiny.*
3. *Pouze zločinci jsou uvězněni.*
4. *Zločinci, kteří jsou uvězněni, nepáchají zločiny.*
5. *Byl spáchán aspoň jeden zločin.*

Chceme dokázat, že z těchto pěti výroků plyne výrok

$$\varphi = \text{Existují zločinci, kteří nejsou uvězněni.}$$

Nejprve všechna tvrzení formalizujeme. Symboly Zn, Z, U *budou označovat po řadě jednomístné predikáty* zločin, zločinec *a* uvězněn *a symbol* P *bude označovat dvouargumentový predikát* x páchá y*. Formalizovaná tvrzení budou pak mít tento tvar:*

1. $\forall x(Zn(x) \Rightarrow \exists y P(y,x))$
2. $\forall x \forall y((Zn(x) \wedge P(y,x)) \Rightarrow Z(y))$
3. $\forall y(U(y) \Rightarrow Z(y))$
4. $\forall y((Z(y) \wedge U(y)) \Rightarrow \neg\exists x(Zn(x) \wedge P(y,x)))$
5. $\exists x(Zn(x))$

K těmto formulím přidáme negaci výroku φ*, tj. formuli*

$$\neg\exists y(Z(y) \wedge \neg U(y))$$

a budeme dokazovat jejich nesplnitelnost.

Všech šest formulí nejprve převedeme do klauzulární podoby a nesplnitelnost prokážeme odvozením prázdné klauzule.

Klauzulární podoba výchozích formulí je (s využitím Skolemovy konstanty v 5. formuli) tato:

1. $\neg Zn(x) \vee P(f(x)), x)$

2. $\neg Zn(x) \vee \neg P(y, x) \vee Z(y)$
3. $\neg U(y) \vee Z(y)$
4. $\neg Z(y) \vee \neg U(y) \vee \neg Zn(x) \vee \neg P(y, x)$
5. $Zn(a)$
6. $\neg Z(y) \vee U(y)$

a prázdnou klauzuli odvodíme v těchto krocích

7. $P(f(a), a)$ *z formulí 1 a 5.*
8. $\neg Zn(a) \vee Z(f(a))$ *z formulí 7 a 2.*
9. $Z(f(a))$ *z 8 a 5.*
10. $\neg Z(f(a)) \vee \neg U(f(a)) \vee \neg Zn(a)$ *z formulí 4 a 7.*
11. $\neg Z(f(a)) \vee \neg U(f(a))$ *z 10 a 5.*
12. $\neg U(f(a))$ *z 11 a 9.*
13. $\neg Z(f(a))$ *ze 12 a 6. A konečně*
14. $\Box$ *z 13 a 9.*

V obecném případě však generování *všech* možných rezolvent přesahuje i možnosti počítače. Jsou proto studovány rozmanité heuristiky a strategie zjemňování — vybírají se jen některé rezolventy, nebo se používá vhodného uspořádání klauzulí k urychlování výpočtů. Jsou používány též statistické metody odvozování, z hlediska počítačové realizace jde nejčastěji o interaktivní metody.

Cvičení 3.4.3 *A na závěr kapitoly opět několik kontrolních cvičení.*

1. *Nechť R, S jsou predikátové symboly, f funkční symbol. Které z následujících výrazů jsou a které nejsou správně utvořenými formulemi predikátové logiky?*

   a) $S(x, f(y)) \Leftrightarrow R(y, x)$

   b) $S(S(y), x) \Rightarrow R(y, x)$

   c) $R(x, y) \vee S(y, \forall x(R(x, z))$

   Odpověď*: a) ano, b), c) — ne.*

2. *Formulí prvního řádu vyjádřete, že existují aspoň tři individua, která mají vlastnost $\neg P$, právě když nemají vlastnost R.*

   Odpověď*:* $\exists x \exists y \exists z\ ((\neg P(x) \Leftrightarrow \neg R(x)) \wedge (\neg P(y) \Leftrightarrow \neg R(y)) \wedge (\neg P(z) \Leftrightarrow \neg R(z)) \wedge$ $\wedge\, x \neq y \wedge y \neq z\ \wedge x \neq z)$.

3. *Je pravda, že každá nepravdivá formule PL je nedokazatelná?*

4. *Rozhodněte, které dvojice formulí jsou ekvivalentní:*

   a) $\neg \forall x Q(x),\quad \exists x(\neg Q(x))$

   b) $\neg(\neg(P(x) \vee Q(x))),\quad \neg(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

   c) $(P(x) \Rightarrow (Q(x) \Rightarrow P(x))),\quad ((P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (Q(x) \Rightarrow P(x)))$

   Odpověď*: a), b) ano; c) ne.*

5. *Formalizujte následující úsudky a rozhodněte, zda jsou logicky správné (korektní):*

   a) Všichni Češi pijí pivo. Někteří pijáci piva jsou gurmáni. Tudíž: Někteří Češi jsou gurmáni.

   b) Někteří Češi nepijí víno. Někteří pijáci vína nejsou gurmáni. Tudíž: Někteří Češi nejsou gurmáni.

   Odpověď*:*

   a) $\forall x(C(x) \Rightarrow P(x))$
   $\exists x(P(x) \wedge G(x))$
   tudíž
   $\exists x(C(x) \wedge G(x))$.
   Tento úsudek není logicky korektní. Můžeme se o tom přesvědčit např. Vennovým diagramem.

   b) $\exists x(C(x) \wedge \neg P(x))$
   $\exists x(P(x) \wedge \neg G(x))$
   tudíž
   $\exists x(C(x) \wedge \neg G(x))$.
   Rovněž tento úsudek není korektní.

6. *Rozhodněte, které z následujících formulí PL jsou otevřené, které jsou uzavřené, popř. ani otevřené ani uzavřené:*

   a) $\forall x(P(x) \Rightarrow \forall y Q(y))$

   b) $\forall y(P(x) \Rightarrow \forall x Q(y))$

   c) $\forall x(1 > 0)$

   a) uzavřená, b) ani uzavřená, ani otevřená, c) uzavřená.

7. *Když reflexivnost binární relace R znamená, že $\forall x R(x,x)$, co znamená, že R není reflexivní?*

   Odpověď*: Znamená, že $\neg\forall x R(x,x)$ a tedy, že $\exists x \neg R(x,x)$.*

8. *Když ireflexivnost relace R znamená, že $\forall x \neg R(x,x)$, co znamená, že R není ireflexivní?*

   Odpověď*: Znamená, že $\neg\forall x \neg R(x,x)$ a tedy, že $\exists x \neg\neg R(x,x)$ a tudíž $\exists x R(x,x)$.*
   Poznámka: *Z předchozích dvou příkladů plyne, že nereflexivnost a ireflexivnost jsou různé relace.*

9. *Pro každou z následujících formulí najděte vždy interpretaci, která ukazuje, že daná formule není logicky platnou formulí, tj. nalezněte interpretaci, v níž je daná formule nepravdivá:*

   (P, Q jsou jednomístné predikáty, a je konstanta).

   a) $P(a) \Rightarrow \forall x P(x)$

   b) $\exists x P(x) \Rightarrow P(a)$

   c) $(\exists x P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$

   d) $(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

   e) $\exists x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$

   f) $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$

   g) $\forall x (Q(x) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

10. *Co znamená, že formule predikátové logiky je nedokazatelná?*

11. *Je pravda, že formule $\forall y \exists x R(x,y)$ a $\exists x \forall y R(x,y)$ jsou ekvivalentní?*

    Odpověď*: Nikoli. Můžeme se o tom přesvědčit nalezením vhodné interpretace pro predikát $R(x,y)$. Když např. výraz $R(x,y)$ budeme číst jako $x < y$ na množině přirozených čísel, tak první formule říká, že ke každému přirozenému číslu existuje číslo menší, zatímco druhá formule říká, že existuje takové přirozené číslo, že všechna ostatní přirozená čísla jsou větší. (Takové přirozené číslo se obvykle nazývá nula.)*

    Jiný příklad: Když výraz $R(x,y)$ budeme číst jako "x je předkem y" mezi lidmi (anebo "y je potomkem x"), tak první formule říká, že každý člověk má aspoň jednoho předka, zatímco druhá říká, že existuje takový člověk, že všichni lidé jsou jeho potomci. V jedné tradici se takový člověk nazývá Adam. V téže tradici je ale první formule dokonce nepravdivá.

12. *Nechť P, Q jsou predikátové symboly, c konstanta. Které z následujících formulí predikátové logiky nejsou tautologie?*

a) $\exists x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$

b) $\forall x P(x) \Rightarrow \neg\exists x P(x) \vee P(c)$

c) $\forall x \neg P(x) \Rightarrow \neg\exists x P(x)$

Odpověď: *a).*

13. *Nechť P, Q, R jsou predikátové symboly, c konstanta. Rozhodněte, která z následujících teorií je bezesporná:*

$T1 = \{\exists x P(x),\ \exists x Q(x),\ \neg\exists x R(x)\}$

$T2 = \{\forall x P(x),\ \forall y \neg P(y),\ \forall z\ (P(z) \vee \neg P(z))\}$

$T3 = \{\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \neg P(c),\ Q(c)\}$

$T4 = \{\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x)),\ \neg\neg\exists y(\neg Q(x))\}$

$T5 = \{\neg(\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))),\ \forall z\ P(z),\ ((\forall y P(y)) \Rightarrow \forall y Q(y))\}$

$T6 = \{\neg P(c),\ \neg\exists x Q(x),\ \forall (P(x) \Rightarrow Q(x))\}$

$T7 =$ *množina všech formulí predikátové logiky*

$T8 = \emptyset$

$T9 = \{\neg\forall x P(x),\ \exists y(\neg P(y)\}$

$T10 = \{\varphi; \varphi = \text{atomická formule}\}$

$T11 = \{\varphi; \varphi = \text{negovaná atomická formule}\}$

$T12 = \{\varphi; \varphi = \text{libovolná formule}\}$

$T13 = \{\forall x (P(x) \Rightarrow \neg P(x))\}$

$T14 = \{\forall x (\neg P(x) \Rightarrow P(x))\}$

$T15 = T13 \cup T14$

Odpověď: *$T5, T7, T12, T15$ sporné, ostatní bezesporné.*

14. *Je pravda, že každý model formule $\exists x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$ obsahuje aspoň dva prvky? Uveďte důvody.*

Odpověď: *Nikoli. Formule může být splněna i v jednoprvkové interpretaci. Snadno nalezneme interpretaci, v níž je formule splněna, ale platí přitom $x = y$.*

15. *Nechť P, Q jsou predikátové symboly, c konstanta. $T = \{\forall x (P(x) \vee Q(x)), \neg Q(c)\}$ je teorie. Rozhodněte, zda platí*

a) $T \vdash P(c) \vee Q(c)$

b) $T \vdash \forall y P(y)$

Odpověď: *a) ano, b) ne.*

16. *V jazyce PL zapište věty:*

   a) Každý student zná aspoň jednoho učitele, který ho neučí.

   b) Žádný dobrý učitel nenadržuje žádnému žáku.

   Odpověď*:*

   a) $\forall x \exists y (S(x) \wedge U(y) \wedge Z(x,y) \wedge \neg V(y,x))$

   b) $\neg \exists x \exists y (D(x) \wedge Z(y) \wedge N(y,x))$ *neboli*
   $\forall x \forall y ((D(x) \wedge Z(y)) \Rightarrow \neg N(y,x))$

17. *Nechť* $P(x,y,z)$ *je ternární predikát. Nalezněte intepretaci (model), v níž je formule*

   a) $\exists x \exists y \forall z\ P(x,y,z)$*,*

   b) $\forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(y,x))$

   pravdivá, a jinou interpretaci, v níž je nepravdivá.

   Odpověď*: Ad a) Příklad pravdivé interpretace: na uzavřeném intervalu* $[a,b]$*,* $P(x,y,z)$ *znamená* $x \leq y \leq z$*.*

   Příklad nepravdivé interpretace: stejná relace na množině přirozených čísel.

   Ad b) Příklad pravdivé interpretace: $P(x,y)$ *čti "*$x = y$ *na množině přirozených čísel" anebo "*x *je přímka rovnoběžná s přímkou* y*".*

   Příklad nepravdivé interpretace: $P(x,y)$ *čti "*$x < y$ *na množině přirozených čísel".*

   Jistě najdete mnoho jiných pravdivých interpretací (modelů) daných formulí i mnoho nepravdivých.

18. *Rozhodněte, který z následujích tří úsudků je logicky korektní:*

   a) Tato kniha má aspoň 300 stran. Tatáž kniha má nejvýše 200 stran. Tudíž: je to velmi zajímavá kniha.

   b) Tato kniha má aspoň 300 stran. Tatáž kniha má nejvýše 200 stran. Tudíž: je to velmi nezajímavá kniha.

   c) Tato kniha má aspoň 300 stran. Tatáž kniha má nejvýše 200 stran. Tudíž: dnes je krásně.

   Odpověď*: Všechny tři úsudky jsou z logického hlediska korektní, protože premisy (předpoklady) nemohou být nikdy splněny současně, a protože závěr musí být pravdivý vždy, když premisy (předpoklady) jsou nepravdivé, tak zde závěr může být libovolný.*

19. *Která z následujících pravidel odvozování jsou korektní?*

a) $\frac{P(x)}{\forall x P(x)}$

b) $\frac{\neg P(x), Q(x)}{P(x) \Rightarrow Q(x)}$

c) $\frac{\forall x P(x), \forall x Q(x)}{\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x))}$

Odpověď*: a), b), c) ano.*

Kapitola 4

Formalizované teorie a jejich vlastnosti

4.1 Logická struktura teorií

Teď už máme dostatek materiálu na to, abychom se mohli věnovat obecným vlastnostem teorií formulovaným jak v teoriích prvního řádu, tak v jiných (formálních) jazycích. Proto v této kapitole pojednáme o logické struktuře teorií. Teorie budeme chápat jako množiny formulí.

Teorie jsou systemizované poznatky. Jedny poznatky souvisejí s jinými, nebo dokonce celé množiny poznatků souvisejí s jinými množinami poznatků. Chceme-li sdělit svoje poznatky, používáme jazyka. V předcházejících odstavcích o výrokové a predikátové logice jsme se mohli přesvědčit, že je úzká souvislost mezi faktickým obsahem našich tvrzení a jejich jazykovým vyjádřením. Jazyk $\mathcal{J}$ je dán, když je dána množina všech výrazů (formulí) F, nějaká mimojazyková oblast předmětů $\mathcal{M}$ (kterou jsme si zvykli nazývat struktura pro jazyk $\mathcal{J}$, a nakonec ještě relace interpretace, která uvádí do vztahu výrazy jazyka $\mathcal{J}$ (tj. formule z F) a předměty, o nichž je řeč, tedy objekty ze struktury $\mathcal{M}$. Viděli jsme také, že chceme-li hovořit o logické výstavbě nějakého systému poznatků, stačí často brát v úvahu pouze formální vlastnosti výrazů, tzn. že můžeme odhlédnout od množiny významů a od zamýšlené interpretace. Pak říkáme, že studujeme *syntaktickou* stránku teorií, ostatní aspekty jsou pak záležitostí *sémantického*, popř. *pragmatického* zkoumání.

Definice 4.1.1 *Je-li dána množina F všech správně utvořených formulí jazyka $\mathcal{J}$, řekneme, že libovolná neprázdná množina T je* teorií *v jazyce $\mathcal{J}$, když T je podmnožinou F.*

Logik se tedy nezajímá o to, jak teorie vznikla, o čem mluví, zajímá se pouze o logické souvislosti mezi formulemi (větami), z nichž teorie sestává, a chce poznat vzájemné souvislosti mezi tvrzeními teorie. Jde mu především o to, zda z tvrzení dané teorie nevyplývá spor, zda existuje model dané teorie, případně jaké jsou vztahy mezi všemi modely teorie apod.

Proč vytváříme teorie? Důvody mohou být různé. Když např. přírodovědec navrhuje nějaký experiment, činí tak proto, aby ověřil své hypotézy, které formuloval na základě dřívějších pozorování, nebo aby odhalil nová fakta či zákonitosti o objektech a jevech, které učinil předmětem svého zájmu. A je přitom samozřejmé, že nekonstruuje složité pokusy k tomu, aby nalezl již dobře známé skutečnosti nebo fakta, která z nich dedukcí vyplývají. Vždy se pochopitelně snaží myšlenkovými postupy předem se dovědět co nejvíce o studovaném jevu, aby mu výsledek experimentální činnosti přinesl maximum užitku. Fyzika tohoto století dovedla tuto snahu v podobě myšlenkového experimentu do čisté podoby. Jaké jsou ovšem záruky, že myšlenkové pochody, které realizujeme ve vědě (a nejen ve vědě), jsou správné? Jak se můžeme zabezpečit proti chybným úsudkům, proti nimž rozhodně nejsme imunní?

Již prostý trénink v logickém usuzování zmůže mnoho. Avšak vždy ještě čas od času vznikají situace, kdy prostá důvěra v tzv. *zdravý rozum* nevede k cíli. Vždyť např. fyzika se paradoxy jen hemží. Proto se v následujícím odstavci budeme věnovat formálním systémům detailněji. Budeme si ovšem stále vědomi toho, že teorie formálních systémů není jen samoúčelným rigorózním matematickým popisem, ale že její role je z velké části epistemologická. Lze totiž pozorovat, že rozvoj určité vědní disciplíny má úzkou souvislost právě se stupněm formalizace dané disciplíny. V matematice je to zřejmé, ve fyzice a informatice patrné. Formalizace či matematizace ale postupně zasahuje i do dalších přírodních věd jako je např. biologie (velmi výrazné je to např. v genetice), ale i do společenských věd, včetně věd ekonomických.

4.2 Formální systémy

Abychom si navzájem rozuměli, musíme chápat jazykové výrazy, které používáme při sdělování (komunikaci). K tomu, abychom rozuměli jazykovým výrazům, musíme vědět, jak z dané sady základních symbolů vytvářet složitější výrazy, tzn. že musíme umět rozeznávat dobře utvořené výrazy daného jazyka od ostatních nahodile vytvořených posloupností symbolů z dané sady, z dané abecedy.

Budiž dána konečná[1] neprázdná množina A symbolů (abeceda). Symbolem $A^\star$ označíme množinu všech konečných posloupností symbolů z abecedy A a nazveme je *výrazy* nebo také *slova* v abecedě A nebo nad abecedou A. Mezi výrazy patří i prázdný výraz,

[1] Většina našich úvah z tohoto odstavce bude platit i v případě nekonečných, ale spočetných abeced.

který, bude-li třeba, označíme symbolem λ.

Když např. $A = \{0, 1\}$ je dvouprvková abeceda, tak do množiny všech výrazů patří mj. výrazy: $0, 1, 01101, 11101$, prázdný výraz λ, a samozřejmě i nekonečně mnoho dalších výrazů. Připomeňme si, že třída $A^\star$ všech výrazů nad abecedou A (třeba i jen jednoprvkovou) je vždy nekonečná.

Definice 4.2.1 Formální jazyk *je libovolná (rekurzívní[2]) množina* $\mathcal{J} \subseteq A^\star$.

Uveďme příklady různých formálních jazyků nad abecedou $A = \{0, 1\}$:

$\mathcal{J}_1 = \{0, 1\}$

$\mathcal{J}_2 = \{1, 11, 111, 1111\}$

$\mathcal{J}_3 = \emptyset$

$\mathcal{J}_4 = \{111\ldots1 \textit{(n-krát)}; \forall n \in \mathcal{N}\}$

$\mathcal{J}_5 = A^\star$

$\mathcal{J}_6 = \{\lambda\}$

Když množina dobře utvořených formulí je rekurzívní, může být vymezena pomocí produkčních pravidel (gramatikou).

S pravidly pro konstrukci správných formulí jazyka jsme se seznámili již dříve, proto si tato pravidla nyní připomeneme formou cvičení.

Cvičení 4.2.1 *Definujte formální jazyk výrokové logiky a formální jazyk predikátové logiky.*

Množina *axiomů* $A \subseteq F$ bude libovolná neprázdná rekurzívní množina formulí.

Odvozovací pravidla, někdy též nazývaná *pravidla inference*, jsou rozhodnutelné predikáty definované nad množinou všech dobře utvořených formulí. Budeme vždy předpokládat, že odvozovacích pravidel je konečně mnoho. Ze sémantického hlediska je důležité, aby tato pravidla byla korektní, tj. aby od pravdivých premis vedla k pravdivým závěrům.

[2]Pojem *rekurzívní množiny* je matematickou precizací vyčíslitelné množiny, tj. množiny vyčíslitelné (počítačovým) programem. Podrobněji se s rekurzívními množinami a rekurzívními funkcemi může čtenář seznámit např. v knize Manna, Z.: Matematická teorie programů. SNTL, Praha 1981.

Dosavadní znalosti teorií v jazyce predikátové logiky teď můžeme rekapitulovat tak, abychom viděli, že jde o základní pojmy, společné řadě rozmanitých realizací.

Teorie prvního řádu je množina formulí konstruovaných ve shodě s pravidly tvoření formulí predikátové logiky, jak jsme je definovali v předchozí kapitole. Pro teorie prvního řádu je charakteristické, že kvantifikovány mohou být pouze individuové proměnné, nikoli predikáty, nemůžeme v nich formulovat např. tvrzení, které se týká všech vlastností nebo všech vztahů. Mezi formule prvního řádu tedy nepatří např. takové výrazy jako

$\forall P \exists Q \forall x (P(x) \Leftrightarrow Q(x))$,

$x = y \Leftrightarrow \forall P (P(x) \Leftrightarrow P(y))$,

kterým možná dobře rozumíme, ale nemůžeme s nimi zacházet stejně jako s formulemi prvního řádu. Jsou to formule jazyků vyšších řádů. V obou výše uvedených příkladech se kvantifikuje přes predikáty, zatímco my víme, že v jazyce prvního řádu lze kvantifikovat pouze přes proměnné individuí. Logické systémy vyšších řádů jsou také studovány, jsou ale mnohem komplikovanější, jen málo vlastností takových systémů je dobře uchopitelných (tj. rozhodnutelných, efektivních apod.). Teorie vyšších řádů tak vycházejí za rámec této publikace. Je však třeba poznamenat, že vyjadřovací prostředky teorií prvního řádu jsou natolik bohaté, že v běžných situacích jde o akceptovatelné omezení.

Vraťme se proto k teoriím první řádu a připomeňme některé pojmy důležité z metodologického hlediska.

Důkazem formule φ rozumíme takovou konečnou posloupnost formulí daného jazyka, že každá formule je buď axiómem, nebo je získána z předchozích formulí pomocí nějakého odvozovacího pravidla, a poslední formule v posloupnosti je φ. Když k dané formuli existuje důkaz (ale nemusíme ho znát), říkáme, že formule je dokazatelná. Přesvědčili jsme se již, že k dané dokazatelné formuli může existovat popřípadě i více důkazů, dokonce nekonečně mnoho. Různé důkazy mohou mít i různou délku.

Řekneme, že množina formulí X je *deduktivní systém*, když je uzavřená na důsledky, tj. když je rovna množině všech svých důsledků, nebo ještě jinak, když se odvozováním již nedají získat žádné formule, které by v X již nebyly obsaženy.

Všimněme si, že tato definice má tu přednost, že se opírá pouze o pojem důsledku, a že je tedy použitelná pro jakýkoli formální logický systém, který je definován nad libovolným jazykem. Podobně i pojem bezespornosti množiny formulí lze definovat v takové obecnosti, že není třeba se odvolávat na symboly používané v daném jazyce. Proto říkáme, že množina formulí X daného jazyka je bezesporná, když množina všech jejích důsledků je různá od množiny všech správně utvořených formulí daného jazyka. Jinak je sporná. Jinými slovy, bezespornost v tomto smyslu znamená, že existují formule, které nejsou z množiny X dokazatelné. Je to i přirozená definice, protože teorie, ve které je dokazatelné cokoliv, je jistě poněkud podivná a pro usuzování bezcenná. Viděli jsme již, že bezespornost teorie prvního řádu zároveň znamená, že v ní není dokazatelná žádná formule spolu se svojí negací. Přednost první definice však spočívá v tom, že je použitelná i v případě jazyků, které negaci neobsahují.

Nakonec ještě připomeneme pojem deduktivně úplné množiny formulí. O množině formulí X jazyka $\mathcal{J}$ říkáme, že je úplná, když každá její nadmnožina (tj. taková množina Y, že $X \subseteq Y \wedge Y \neq X$) je sporná. Úplné množiny jsou tedy maximální bezesporné množiny v částečném uspořádání daném inkluzí. K deduktivně úplné množině formulí nelze žádnou novou formuli bezesporně přidat.

O těchto metodologických pojmech platí řada užitečných tvrzení, jejichž platnost není příliš obtížné ověřit, a která jsou velmi důležitá při výstavbě speciálních formalizovaných teorií.

Nechť $X \subseteq F$, kde F je množina všech správně utvořených formulí daného jazyka $\mathcal{J}$. Potom platí

Tvrzení 4.2.1 *Množina všech důsledků libovolné množiny formulí X je deduktivní systém, neboť je sama již uzavřena na logické důsledky.*

Tvrzení 4.2.2 *Každá úplná množina formulí je deduktivní systém.*

Pro každou množinu formulí X je tedy množina všech jejích důsledků deduktivním systémem.

Tvrzení 4.2.3 *Průnik ani sjednocení dvou různých deduktivně úplných množin nejsou úplné množiny.*

Toto tvrzení je zřejmé z toho, co jsme konstatovali výše, totiž že úplné množiny formulí jsou právě maximální bezesporné množiny.

Tvrzení 4.2.4 *Každá část bezesporné množiny je bezesporná. Průnik dvou bezesporných množin je opět bezesporná množina.*

Poznámka. Sjednocení dvou bezesporných množin ovšem již nemusí být bezesporná množina. O tom se ihned přesvědčíme, když např. jedna z množin bude obsahovat formuli φ a druhá formuli $\neg\varphi$.

Tvrzení 4.2.5 *(Lindenbaumova věta) Ke každé bezesporné množině formulí X existuje úplná množina formulí obsahující X.*

Tvrzení Lindenbaumovy věty je však už netriviální v tom smyslu, že vyžaduje dosti silných dokazovacích prostředků z teorie množin, speciálně se k důkazu používá tzv. *Zornova lemmatu*,

4.3 Teorie prvního řádu a modely formalizovaných teorií

V tomto odstavci budeme uvažovat o relačních strukturách, které mají tu vlastnost, že všechny formule dané teorie T jsou v nich pravdivé. Takové struktury, jak víme, v logice nazýváme *modely* dané teorie.

Nechť tedy $\mathcal{M}$ je relační struktura pro teorii T. Ta je modelem teorie T, když každá formule $\varphi \in T$ je pravdivá v $\mathcal{M}$, tj. $\mathcal{M} \models \varphi$.

Je zřejmé, že mohou existovat teorie, které mají více než jeden model.[3]

O teoriích, které mají (až na izomorfizmus) právě jeden model, říkáme, že jsou *kategorické*.

Zajímavá a velice důležitá je otázka, zda existují teorie, které nemají žádný model. Takové teorie jsou, jak víme z předcházejících kapitol, v jistém smyslu bezcenné, protože formule takové teorie nelze splnit současně. Důležité ale je, že je nelze splnit současně. Každá formule sama o sobě však splnitelná být může.

Pro jistou, dosti širokou třídu teorií lze ovšem ukázat, že platí důležitá *Gödelova* věta o tom, že teorie T má alespoň jeden model právě tehdy, když je bezesporná. Bezespornost je tedy v logice chápana jako uskutečnitelnost. Nalezením libovolného sémantického modelu teorie prokazujeme její bezespornost. Co je bezesporné, je uskutečnitelné a naopak, co je uskutečnitelné, je bezesporné.[4]

Pro teorie prvního řádu navíc pro náš syntaktický pojem bezespornosti platí

Tvrzení 4.3.1 *(Věta o kompaktnosti.) Teorie T je bezesporná právě tehdy, když každá*

[3]Příkladem takové teorie je třeba lineární uspořádání na alespoň dvouprvkové množině. Je zřejmé, že takových uspořádání lze definovat více.

[4]Každá z obou implikací však zdůrazňuje poněkud odlišnou stránku ekvivalence. První straní rozumu, druhá evidenci. Zajímavé pojednání na toto téma, v němž je vystižen vývoj představ o logickém pojmu bezespornosti, může čtenář nalézt v knize Petra Vopěnky: Rozpravy s geometrií, Panorama, Praha 1989.

její konečná část je bezesporná.

Důkaz: (viz např. [30]).

4.3.1 Axiomatizovatelnost

Nechť $\mathcal{S}$ je třída struktur pro jazyk $\mathcal{J}$. Třída struktur $\mathcal{S}$ se nazývá *axiomatizovatelná*, existuje-li v jazyce $\mathcal{J}$ taková teorie T, že každá struktura $\mathcal{M} \in \mathcal{S}$ je modelem této teorie, a nazývá se *konečně axiomatizovatelná*, když existuje taková konečná podmnožina T_0 teorie T, že každá formule $\varphi \in T$ je dokazatelná z T_0 a každá struktura $\mathcal{M} \in \mathcal{S}$ je modelem teorie T_0. Pojem axiomatizovatelnosti, a speciálně konečné axiomatizovatelnosti tedy vystihuje možnost popsat danou třídu struktur pomocí formálních vlastností daného jazyka.

4.3.2 Elementárně ekvivalentní modely

Dvě struktury $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ se nazývají *elementárně ekvivalentní*, když pro každou formuli φ jazyka $\mathcal{J}$ platí, že $\mathcal{M}_1 \models \varphi$ právě tehdy, když $\mathcal{M}_2 \models \varphi$. Tedy např. dvě izomorfní struktury jsou elementárně ekvivalentní. Navíc lze ukázat, že když $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ jsou elementárně ekvivalentní a $\mathcal{M}_1$ je konečná struktura (tj. nosič M_1 je konečná množina), tak $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ jsou izomorfní. Tuto vlastnost elementárně ekvivalentních struktur můžeme tedy dobře využít při studiu konečných struktur, speciálně třeba konečných grafů.

4.4 Abstraktní operace logického důsledku

Nyní již můžeme přistoupit k obecného pojmu logického důsledku, který učiníme nezávislým na volbě jazyka. Budeme předpokládat, že jazyk je dán, což znamená, že jsou dána pravidla pro tvorbu formulí. Označme tedy F množinu všech správně utvořených formulí daného jazyka a $\mathcal{P}(F)$ množinu všech podmnožin množiny F tj. $\mathcal{P}(F) = \{X; X \subseteq F\}$.

Definice 4.4.1 *Zobrazení $Cn : \mathcal{P}(F) \mapsto \mathcal{P}(F)$ (tj. zobrazení množin formulí do množin formulí) nazveme* operace logického důsledku na F, *pokud pro každou dvojici množin $X, Y \subseteq F$ platí*

1. *$X \subseteq Cn(X)$ (reflexivnost);*

2. *$X \subseteq Y$, potom $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$ (monotónnost);*
3. *$Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$ (tranzitivnost).*

Poznámka: Označení Cn je z angl. *consequence*, což znamená důsledek.

Některá tvrzení z odst. 4.1 a některá další tvrzení teď můžeme vyjádřit přehledně. Například platí

$Cn(X) = Cn(Cn(X))$.

Jestliže $X \subseteq Cn(Y)$, potom $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$.

Jestliže $X \subseteq Cn(Y)$ a $Y \subseteq Cn(Z)$, potom $X \subseteq Cn(Z)$.

$Cn(X \cap Y) \subseteq (Cn(X) \cap Cn(Y)) \subseteq Cn(X)$.

$Cn(X \cup Y) = Cn(Cn(X) \cup Y) = Cn(X \cup Cn(Y)) = Cn(Cn(X) \cup Cn(Y))$.

Za zmínku ještě stojí dvě následující tvrzení:

Tvrzení 4.4.1 *(Restrikční věta) Jestliže $g : \mathcal{P}(F) \mapsto \mathcal{P}(F)$ je takové zobrazení, že pro danou množinu $A \subseteq F$ platí $g(X) = A \cap Cn(X)$, kde X je libovolná množina $X \subseteq F$, pak g je reflexivní, monotónní a tranzitivní.*

Tvrzení 4.4.2 *Nechť $S \subseteq \mathcal{P}(F)$. Zobrazení $f : \mathcal{P}(F) \mapsto \mathcal{P}(F)$, které je definované tak, že $f(X)$ je rovno průniku všech množin $Y \in S$, které obsahují X, a jindy je rovno F, je operace logického důsledku na F.*

Jinými slovy, libovolná třída množin formulí z F určuje právě jednu operaci logického důsledku na F.

Obě tvrzení snadno dokážeme ověřením všech tří vlastností operace logického důsledku.

Uveďme několik příkladů operace logického důsledku:

Příklad 4.4.1 *Když F je množina formulí výrokové logiky, Ax množina axiomů výrokové logiky, $\mathcal{R}$ množina odvozovacích pravidel (modus ponens, pravidlo o substituci a pravidlo o nahrazení ekvivalentních podformulí), pak zobrazení $c : \mathcal{P}(F) \mapsto \mathcal{P}(F)$ definované tak, že $c(X)$ je nejmenší množina obsahující $X \cup Ax$, která je uzavřená na všechna pravidla z $\mathcal{R}$, je operace konsekvence na F.*

Příklad 4.4.2 *Nechť nyní F je třída všech formulí jazyka prvního řádu a $\mathcal{M}$ je třída relačních struktur pro F. Operaci $Cn(X)$ nyní definujeme takto: Pro každou formuli*

$\varphi \in F$ je $\varphi \in Cn(X)$ právě tehdy, když každý model množiny formulí z X je též modelem formule φ.

První příklad ukazuje, že náš abstraktní pojem logické konsekvence zahrnuje syntaktický pojem logického důsledku, druhý zas ukazuje, že je v něm zahrnut i pojem sémantického důsledku. Patří sem ale též zcela abstraktní pojmy, naše definice totiž definuje jistý typ uzávěrové operace. Na dané množině F lze definovat množství operací konsekvence. Mezními případy jsou operace a) $Cn(X) = X$, která ke každé množině formulí jako logický uzávěr nepřiřazuje nic než množinu samu, b) $Cn(X) = F$, což je operace konsekvence, ve které je množina důsledků libovolné množiny sporná. Obě tyto operace jsou samozřejmě nezajímavé, ty zajímavé jsou všechny mezi nimi, je ale dobré si takto uvědomit, o čem vlastně mluvíme. Úvahy v terminologii abstraktní logické konsekvence chápeme spíše jako úvahy metodologické.

Cvičení 4.4.1 *A na závěr opět několik kontrolních otázek.*

1. *Co znamená, že formule φ teorie T prvního řádu je nedokazatelná?*
2. *Vyjádřete třemi různými způsoby, co znamená, že je teorie bezesporná.*
3. *O teorii T prvního řádu bylo zjištěno, že v ní je dokazatelná libovolná formule. Co lze říci o bezespornosti této teorie?*

   Odpověď: *Teorie T je sporná.*

4.5 Gödelovy výsledky

Tento odstavec se týká snad nejdůležitějších výsledků logiky dvacátého století, kterých dosáhl brněnský rodák Kurt Gödel ve třicátých letech. Jejich negativní podoba, tvrzení typu, že něčeho podstatného nelze dosáhnout, byla pro mnohé logiky a matematiky, ale ve svém důsledku pro mnohé vědce nejen překvapením, ale někdy i frustrací. Mimo jiné to bylo definitivní a zřetelné poznání nerealizovatelnosti Hilbertova programu formalizace.

4.5.1 Gödelova úloha (1931)

Popíšeme nejprve jednoduchou úlohu, v níž je naznačena Gödelova idea důkazu neúplnosti některých dostatečně bohatých teorií prvního řádu. V příkladu půjde o velmi jednoduchou situaci, či spíše o velmi jednoduchý jazyk prvního řádu a o jednoduchou teorii.

Výpočtový stroj (počítač), který tiskne výrazy složené z následujících pěti znaků:

$$\sim P \;\; N \;\; (\;\;)$$

Výraz je neprázdný konečný řetězec znaků. Jazyk bude obsahovat intuitivně srozumitelný predikát **tisknutelný**(X) a jednu operaci **norma výrazu**$(X) = X(X)$. Př.: normou výrazu $P \sim$ je výraz $P \sim (P \sim)$. **Sentence** je výraz některého z následujících tvarů:

$$P(X),\ PN(X),\ \sim P(X),\ \sim PN(X)$$

Teď ještě uvedeme definici "pravdivosti" pro sentence. Řekneme, že

sentence $P(X)$ je **pravdivá**, když výraz X je tisknutelný,
$PN(X)$ je **pravdivá**, když norma výrazu X je tisknutelná,
$\sim P(X)$ je **pravdivá**, když výraz X není tisknutelný,
a konečně $\sim PN(X)$ je **pravdivá**, když norma výrazu X není tisknutelná.

Dále budeme předpokládat, že náš výpočtový **stroj je dokonale korektní**, což znamená, že všechny sentence, které vytiskne, jsou pravdivé. To mj. znamená, že když např. stroj tiskne $P(X)$, tak X je skutečně tisknutelná (X bude strojem dříve nebo později vytištěna). Také když $PN(X)$ je tisknutelná, tak i $X(X)$ (norma výrazu X) je tisknutelná.

Předpokládejme nyní, že X je tisknutelná. Znamená to, že také $P(X)$ je tisknutelná? Ne nutně. Jestliže X je tisknutelná, pak $P(X)$ je jistě pravdivá, ale nemáme nikde zaručeno, že stroj je schopen vytisknout všechny pravdivé sentence, víme pouze, že stroj nikdy nevytiskne nepravdivou sentenci. Teď už můžeme formulovat gödelovskou otázku:

Je možné, aby stroj mohl vytisknout všechny pravdivé sentence? Odpověď je **nikoli.** Abychom to ověřili, stačí už jen vyřešit jinou, snazší úlohu: Nalezněte pravdivou sentenci, kterou stroj nemůže vytisknout!

[**Návod:** Nalezněte sentenci, která tvrdí svoji vlastní netisknutelnost – t.j. sentenci, která je pravdivá, právě tehdy, když není tisknutelná strojem.]

Řešením, jak snadno ověříme, je sentence:

$$\sim PN(\sim PN)$$

neboť podle definice "pravdy" je sentence pravdivá, právě tehdy, když norma výrazu $\sim PN$ není tisknutelná. Ale normou výrazu $\sim PN$ je právě sentence $\sim PN(\sim PN)$! Tudíž tato sentece je pravdivá, právě když není tisknutelná. To znamená, že sentence je buď pravdivá a netisknutelná, nebo je tisknutelná a nepravdivá. Druhá alternativa porušuje předpoklad, že stroj nikdy netiskne sentence, které nejsou pravdivé.[5] Tudíž naše sentence musí být pravdivá, ale stroj ji nemůže vytisknout.

Všimněme si ještě, že sentence $PN(\sim PN)$ je nepravdivá (protože její negace je pravdivá). Avšak tato sentence je rovněž nedokazatelná v systému (vzhledem k předpokladu, že systém je korektní). A tak sentence

$$PN(\sim PN)$$

je příkladem sentence, která je **nerozhodnutelná** v daném systému.

4.5.2 Varianta Gödelovy úlohy

Budeme uvažovat trochu jiný stroj, který tiskne výrazy složené z těchto pěti znaků:

$$\sim P \quad N \quad 1 \quad 0$$

Dále v této variantě budeme ještě pracovat s přirozenými čísly. Ta zde budeme reprezentovat binárním zápisem (jako řetězce z jedniček a nul) a pro účely této úlohy ztotožníme přirozená čísla s binárními numerály, které je reprezentují.

Gödelovo číslo $g(X)$ **výrazu** X definujeme následovně: Pěti jednotlivým znakům $\sim PN10$ přiřadíme postupně Gödelova čísla 10, 100, 1000, 10000, 100000. Gödelovo číslo složeného výrazu pak získáme složením odpovídajících Gödelových čísel znaků z nichž se skládá. Takže např. výraz PNP má Gödelovo číslo 1001000100.

Norma výrazu bude definována rovností norma$(X) = Xg(X)$. Například norma výrazu (PNP) je výraz $PNP1001000100$.

Sentence mají nyní tvar: PX, PNX, $\sim PX$, $\sim PNX$, kde X je libovolný výraz (zapsaný v binární notaci).

Definice pravdivosti bude pozměněna takto:

PX je **pravdivá**, když X je Gödelovo číslo tisknutelného výrazu,
PNX je **pravdivá**, když X je Gödelovo číslo výrazu, jehož norma je tisknutelná,
$\sim PX$ je **pravdivá**, když PX není pravdivá (X není Gödelovo číslo tisknutelného výrazu),
$\sim PNX$ je **pravdivá**, když PNX není pravdivá.

A konečně **úloha je stejná** jako v prvním případě: Nalezněte pravdivou sentenci, kterou stroj nemůže vytisknout.

Teď už je zřejmé, že řešení modifikované úlohy je $\sim PN101001000$.

[5] Zde je místo, kde je korektnost stroje podstatně využita.

Po těchto dvou úlohách by se mohlo zdát, že je to sice zajímavá vlastnost systému, ale že jde jen o jakousi singularitu, a tedy vlastnost právě tohoto systému. Kurt Gödel ale ukázal, že je to velmi podstatná vlastnost každého "dostatečně bohatého" systému. Přitom dostatečně bohatým systémem se rozumí formální systém, který obsahuje elementární aritmetiku. Gödelův "trik" spočívá v důmyslném kódování formulí formálního jazyka přirozenými čísly, kterému se říká gödelizace. Pro samu aritmetiku je pochopitelně podstatně složitější než v předchozím příkladě, je založen na prvočíselných rozkladech. Idea z uvedeného příkladu ale prosvítá. Je možná zajímavé, že tento příklad zapadl a byl znovu "objeven" Raymondem Smullyanem a reprodukován v jeho knize o Gödelových důkazech neúplnosti [60], která vyšla v roce 1992.

K těm závažným důsledkům pak např. patří to, že není možné dokázat bezespornost matematiky, přesněji aritmetiky, jejími vlastními prostředky, ale případně jen v systému silnějším.

Gödelovy výsledky silně ovlivnily nejen naše porozumění logice a matematice, ale významně ovlivnily i mnohé další vědní disciplíny. Mezi ně např. zcela jistě patří i lingvistika, ale i kognitivní věda, která se snaží porozumět lidské mysli.

Kapitola 5

Neklasické logiky

5.1 Další logické kalkuly

Ukázali jsme, že v logice, na rozdíl od běžného vyjadřování, musí být ustálen a přesně stanoven význam jednotlivých termínů. Tak například významy výrokových spojek můžeme definovat tabulkou, která stanoví, pro které kombinace pravdivostních hodnot elementárních výroků je výsledný složený výrok pravdivý a pro které nepravdivý, nebo jinak, kdy má pravdivostní hodnotu 1 a kdy 0. Říkáme, že pracujeme v oboru dvouhodnotové nebo také klasické výrokové logiky. To ovšem může vést k tomu, že nepostihneme vždy všechny vlastnosti odpovídajících výrazů běžně užívaného jazyka a často i jazyka vědy. Snaha logiků dosáhnout co možná nejširší shody exaktních logických termínů běžně v jazyce vědy užívaných vedla k vytvoření řady nových logických kalkulů, v nichž jsou buď jiné, nebo odlišně chápané logické termíny, anebo jsou zkoumány výroky, o nichž nemůžeme s určitostí říci, zda jsou pravdivé, či nepravdivé, a kterým tudíž připisujeme další pravdivostní hodnoty. Obor pravdivostních hodnot, který byl dosud reprezentován dvouprvkovou množinou, se například rozšíří o další hodnoty a počet těchto hodnot se neomezuje. Původní formulace *vícehodnotových logik* vychází z principu trojhodnotovosti. Její tvůrce, polský logik Łukasiewicz, ukázal, že se v běžném vyjadřování setkáváme se smysluplnými výroky, které nenabývají žádné ze dvou obvyklých pravdivostních hodnot, a proto jim musíme připsat třetí pravdivostní hodnotu, kterou pak interpretoval jako *možnost.* Později bylo nalezeno i axiomatické vyjádření trojhodnotové logiky a byla též prokázána její úplnost. Využití zákonitostí vícehodnotové logiky může ve vědeckém výzkumu přijít v úvahu např. při zpracování binárních dat, kdy některé údaje, které měly být na pozorovaných objektech zjištěny, nám nejsou známy, a to buď z principiálních důvodů, anebo prostě chybí, třeba proto, že selhal měřící přístroj. Idea trojhodnotové logiky byla v dalším vývoji zobecněna na logiky s libovolným konečným počtem pravdivostních hodnot. I když byly realizovány některé zajímavé aplikace, stále se ještě vedou diskuse o problému intuitivně adekvátní interpretace výrokových spojek v takto definovaných vícehodnotových kalkulech.

Zajímavých výsledků bylo dosaženo, když za abstraktní pravdivostní hodnoty bylo použito kontinuum reálných čísel (např. interval mezi nulou a jedničkou). Byly učiněny pokusy interpretovat takové kalkuly jako *logiky pravděpodobnostní*.

S motivy vzniku vícehodnotových logik souvisejí i motivy vzniku *modálních logik*. V modálních logikách jde o to, jak exaktně popsat modality možnosti a nutnosti a popřípadě další. Modální logiky vznikaly z kritiky přísně extenzionálního charakteru klasické dvouhodnotové logiky. Dnes je již známa řada kalkulů zahrnujících některé důležité vlastnosti výše uvedených modalit.

Náš výčet neklasických logických systémů však není ani zdaleka úplný, nehovořili jsme např. vůbec o intuicionistické logice. Tyto systémy, i když samy o sobě velice zajímavé, totiž přesahují rámec naší publikace, neboť jejich cílem není ani tak aplikační použití, jako samotné budování základů matematiky. Čtenáře, který by se o neklasické logické kalkuly zajímal podrobněji, odkazujeme např. na knihu [45] nebo na knihu [51], která už ovšem předpokládá hlubší znalosti matematiky, speciálně obecné algebry.

Nakonec se ještě zmiňme o tzv. *induktivní logice*. Induktivní logika nepatří k sérii výše diskutovaných logických kalkulů, neboť se od nich podstatně liší metodami zkoumání i prostředky popisu. Často se induktivní logika klade jako protiklad logiky deduktivní, což je dáno způsobem, jakým se v induktivní logice získávají závěry z předpokladů. Zatímco při dedukci získáváme závěry s jistotou, tj. vycházíme-li z pravdivých premis, vedou nás pravidla dedukce opět k pravdivým závěrům, je naopak každé induktivní usuzování zatíženo větší či menší mírou nejistoty. Problematikou indukce a induktivních metod se zabývali mnozí autoři, často byla tato problematika pojednávána jako filozofická problematika. J. S. Mill, který byl iniciátorem tzv. eliminační indukce (známých 5 Millových kánonů indukce), vytvořil faktický přechod mezi ryze induktivní a ryze deduktivní metodou.

Matematizací induktivní logiky se ponejvíce zabýval Rudolf Carnap, jehož kalkul je vlastně matematickou precizací, formalizací a axiomatizací pojmu potvrzení (konfirmace) hypotézy a úzce souvisí s otázkami pravděpodobnosti. V současné době bylo již podáno několik alternativních kalkulů majících za základní (primitivní) termín potvrzení základní hypotézy h za předpokladu e. Zároveň však také bylo ukázáno (Dana Scott), že existují obory (množiny), na nichž principiálně nemůže existovat žádná funkce, která by mohla být mírou potvrzení hypotézy. Tím vzniká motivace pro tvorbu nových kalkulů induktivní logiky, které by adekvátněji vystihovaly uvažované pojmy.

Na druhé straně lze považovat moderní matematickou statistiku za matematizaci induktivních postupů používaných v empirických vědách. Tato matematizace má z logického hlediska mnoho nedostatků, ale v její prospěch mluví kritérium praxe; bylo již dostatečně prokázáno, že v běžné vědecké práci je matematická statistika účinným nástrojem indukce. V matematické statistice jsou hypotézami tvrzení (výroky) vypovídající o pravděpodobnostních rozloženích a jejich charakteristikách; příkladem může být často používaná a testovaná (základní, nulová) hypotéza o rovnosti středních hodnot dvou normálních rozděžení náhodné veličiny ve dvou různých skupinách a k ní alternativní hypotéza říkající, že jedna ze středních hodnot je větší. Běžný postup je pak založen na *akceptování* alternativní hypotézy na základě hodnoty určité funkce vypočtené z naměřených dat. Akceptování probíhá tak, aby byla kontrolována pravděpodobnost chyby, tj. akceptování nepravdivé hypotézy. Podstatě statistické indukce je věnována rozsáhlá literatura; nicméně dosud neexistuje žádný jednotný názor na tuto problematiku (viz např. úvodní partie skript Jaroslava Hájka a Dany Vorlíčkové[1], z logického hlediska pak práce Petra Hájka a Tomáše Havránka[2]).

V souvislosti se snahami modelovat na počítači lidskou inteligenci došlo v posledních letech k prudkému rozvoji výzkumu v řadě těch typů usuzování, která se - podobně jako induktivní usuzování - musejí vyrovnávat s absencí informace. Takové usuzování se často označuje jako *nemonotónní*, protože přidání nové informace může vést k následné revizi znalostí. O nemonotónním usuzování bude podrobněji pojednáno v následující kapitole.

5.2 Vícehodnotové a modální logiky

Vícehodnotové a modální logiky jsou rozšířením klasické dvouhodnoté logiky, v nichž se zkoumají takové situace, kdy nejsme schopni určit pravdivostní hodnotu výroku s jistotou, anebo se studují pojmy jako modality možnosti a nutnosti. K nim patří i kondicionální logiky, v nichž jde o studium podmíněných výroků, což je problematika dobře známá např. programátorům.

5.2.1 Trojhodnotová logika

V tomto odstavci se na výroky budeme dívat trochu jinak než jako na dvouhodnotová tvrzení typu *ano/ne*. Abychom postihli i situace, kdy nevíme, zda je výrok A pravdivý či nepravdivý, zavedeme třetí "pravdivostní" hodnotu, která bude znamenat *nevím*, a kterou označíme symbolem $\times$.

Výroková spojka negace $\neg$ bude pak definována následující tabulkou:

[1] Hájek, J. - Vorlíčková, D.: Matematická statistika. SPN (skripta MFF UK), Praha 1977.

[2] Hájek, P. - Havránek, T.: Mechanizing Hypothesis Formation - Mathematical Foundations for a General Theory. Springer-Verlag 1978 a Havránek, T.: Towards A Model Theory of Statistical Theories. Synthese *36* (1977), 441 - 458.

φ	$\neg\varphi$
1	0
0	1
$\times$	$\times$

Tato tabulka jistě není překvapující. Pro klasické pravdivostní hodnoty pravda a nepravda se shoduje s nám dobře známou tabulkou negace, pro hodnotu $\times$ přirozeným způsobem dává negaci opět hodnotu $\times$, protože nevím-li nic o pravdivostní hodnotě výroku φ, nevím samozřejmě nic ani o hodnotě výroku $\neg\varphi$. Jde tedy o informační pojetí negace.

Na tomto místě však musíme připomenout, že jsme se dopustili jisté nedůslednosti v označení. Symbol negace zde vlastně změnil svůj význam, jde o modifikovaný pojem, takže kdybychom chtěli být důslední, měli bychom správně tuto novou, trojhodnotovou negaci označovat jiným symbolem, např $\neg_3$. Pokud ovšem nevznikne nebezpečí nedorozumění, nebudeme tak činit, zvláště když naše trojhodnotová negace je rozšířením klasické dvouhodnotové negace. Podobně budeme postupovat i u ostatních výrokových spojek. Faktickou odlišnost nových spojek však budeme mít stále na mysli. To, co víme o klasické disjunkci, nás vede k této tabulce trojhodnotové disjunkce, kterou bychom opět měli značit spíše symbolem $\vee_3$:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
1	1	1
1	0	1
1	$\times$	1
0	1	1
0	0	0
0	$\times$	$\times$
$\times$	1	1
$\times$	0	$\times$
$\times$	$\times$	$\times$

Poznámka: Všimněme si ještě, že tuto “dlouhou” tabulku můžeme zapsat i jinou, úspornější, formou

$\varphi \vee \psi$	1	$\times$	0
1	1	1	1
$\times$	1	$\times$	$\times$
0	1	$\times$	0

Trojhodnotovou spojku konjunkce můžeme teď zavést dvěma způsoby. Opět tabulkou, anebo jako zkratku za složenou formuli

$$\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)\ .$$

Snadno se přesvědčíme, že při této definici bude tabulka trojhodnotové konjunkce následující:

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
1	1	1
1	0	0
1	$\times$	$\times$
0	1	0
0	0	0
0	$\times$	0
$\times$	1	$\times$
$\times$	0	0
$\times$	$\times$	$\times$

Při konstrukci tabulky konjunkce jsme postupovali analogickým způsobem jako při konstrukci pravdivostních tabulek klasické výrokové logiky, ale s tím rozdílem, že výchozí tabulky pro negaci a disjunkci byly jiné.

Podobně jako v klasické dvouhodnotové logice můžeme uvažovat o všech myslitelných jedno-, dvou- a popř. i více-argumentových výrokových spojkách. Zůstaňme na chvíli u jednoargumentových. Ve dvouhodnotové logice, jak jsme viděli, jsou čtyři (negace, asserce, true a false). V trojhodnotové logice takových spojek ovšem můžeme definovat $3^2 \times 3$, tedy 27. To je úctyhodné číslo![3] V běžném jazyce je rozhodně nepoužíváme všechny. Některé jsou ovšem velmi zajímavé, a proto se jim budeme věnovat podrobněji v následujícím odstavci.

Zatím jsme definovali pouze tři trojhodnotové spojky. Otázkou zůstává, jak definovat implikaci. Tady se ale cesty rozcházejí. Záleží totiž na tom, jak budeme rozumět pojmům implikace, tautologie a vyplývání. Touto problematikou vícehodnotových logik se zabývali zejména Łukasiewicz a Kleene.

Uvedeme dvě různé tabulky implikace. Budeme je rozlišovat pomocí indexů podle jejich autorů Łukasiewicze a Kleeneho:

[3] Čtenář si jistě snadno vytvoří tabulku všech sedmadvaceti jednoargumentových spojek.

φ	ψ	$\Rightarrow_K$	$\Rightarrow_L$
1	1	1	1
1	0	0	0
1	$\times$	$\times$	$\times$
$\times$	1	1	1
$\times$	0	$\times$	$\times$
$\times$	$\times$	$\times$	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	$\times$	1	1

Jak je vůbec možné, že máme dvě různé definice implikace? To souvisí s motivací pro tyto pojmy, a každý z nich tedy vyjadřuje různé věci. Łukasiewiczova koncepce je historicky starší a je vedena úvahami o budoucích událostech. U výroků "Dnes bylo krásně." či "Ted prší." jsme schopni jednoznačně rozhodnout o jejich pravdivosti či nepravdivosti, avšak u některých výroků, které se týkají budoucích událostí, to tak snadné být nemusí. Když např. řekneme, že "Za rok budu v Praze.", tak mohu mít v pravdivost tohoto výroku větší či menší důvěru, ale o pravdivosti či nepravdivosti nemůžeme nic říci s jistotou. Je možné, že tomu tak bude, je ale též možné, že tomu tak nebude. Naproti tomu Kleeneho koncept trojhodnotové implikave je motivován absencí informace: "Když nevím, tak nevím."

Různé definice implikace mají pochopitelně za důsledek platnost různých formulí. Tak např. ani v Łukasiewiczově logice ani v Kleeneho logice neplatí zákon vyloučení třetího (*princip tercium non datur*), ani zákon sporu. V Kleeneho logice navíc neplatí zákon dvojité negace, tj.

$$\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi \ .$$

(protože pro $val(\varphi) = \times$ nabývá hodnoty $\times$), zatímco v Łukasiewiczově logice tento princip platí.

V dalších odstavcích se seznámíme s tím, jak trojhodnotový přístup může být využit k definici modalit.

Ideu trojhodnotových logik lze též snadno zobecnit na vícehodnotové logiky. Pak ovšem vzniká otázka, co budeme rozumět pod pojmem tautologie. Jedna možnost je striktní, že to jsou právě jen ty formule, které (stejně jako v klasické logice) nabývají hodnoty 1 při každém ohodnocení proměnných. Jiná možnost je hovořit o *A-pravdivých* formulích, tj. formulích, které pro libovolné ohodnocení proměnných nabývají hodnoty z vytčené množiny A pravdivostních hodnot.

Cvičení 5.2.1 *1. Ukažte, že v Łukasiewiczově logice platí zákony dvojité negace, tj. formule $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$ a $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$, zatímco v Kleeneho logice nikoli.*

2. *Dokažte, že princip tercium non datur, tj. formule* $\varphi \vee \neg\varphi$*, není tautologií ani Łukasiewiczovy ani Kleeneho logiky.*

3. *Ověřte, že v Łukasiewiczově logice, podobně jako v logice klasické, platí (jsou tautologiemi) formule:*
$\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi)$
$\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$
$\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$
$(\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

4. *Ověřte, že na rozdíl od klasické dvouhodnotové logiky v Łukasiewiczově logice neplatí zákon Dunse Scotta, tj. formule* $(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \psi$*. (Kontradikce není explozivní.)*

5. *Ověřte, že množina* $\{\neg, \Rightarrow\}$ *je v Łukasiewiczově i Kleeneho logice funkčně neúplná. (Návod: Ukažte, že např. jednoargumentový operátor* T*, který každé pravdivostní hodnotě přiřazuje hodnotu* $\times$ *není definovatelný.)*

6. *Ověřte, že přidáním operátoru* T *z předchozího příkladu k trojhodnotové negaci a Łukasiewiczově implikaci dostaneme funkčně úplnou množinu operátorů (Słupecki).*

5.2.2 Externí negace a operátory jistoty a možnosti

V předešlém odstavci jsme navrhli jedno možné rozšíření klasické negace vzhledem ke třetí pravdivostní hodnotě. Trojhodnotovou spojku negace můžeme kombinatoricky právě vzhledem ke třetí pravdivostní hodnotě chápat ještě dvěma dalšími způsoby: optimisticky (výslednou hodnotou bude 1) nebo pesimisticky (výslednou hodnotou bude 0). Obě takto definované negace vlastně eliminují třetí pravdivostní hodnotu. Někdy se jim také říká *externí negace.*[4] Proto nadále, budeme-li hovořit o externí negaci a nebude-li řečeno jinak, budeme mít vždy na mysli optimistickou externí negaci.

Tabulka externí optimistické negace (označíme ji symbolem $\sim$) tedy bude tato:

φ	$\sim \varphi$
1	0
0	1
$\times$	1

zatímco tabulka pesimistické negace (označíme ji symbolem $\sim^p$) bude tato:

[4] V dalším ještě uvidíme, že stačí, aby jazyk obsahoval jednu z nich, druhou pak snadno dodefinujeme.

φ	$\sim^p \varphi$
1	0
0	1
$\times$	0

Následující tabulka pak přehledně ukazuje souvislost mezi trojhodnotovou negací a externí (optimistickou) trojhodnotovou negací:

φ	$\sim \varphi$	$\neg\varphi$	$\neg\neg\varphi$	$\sim\sim \varphi$	$\neg \sim \varphi$	$\sim \neg\varphi$
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
$\times$	1	$\times$	$\times$	0	0	1

Pomocí externí a interní negace nyní můžeme definovat další symboly jazyka $\Box$, $\Diamond$, které budeme chápat jako užitečné zkratky. Symbol $\Box$ pro *externí asserci* či *jistotu*, nebo také *nutnost* a symbol $\Diamond$ pro *možnost*:

Definice 5.2.1 *Definiční rovnosti pro* $\Box$ *a* $\Diamond$ *jsou*

$$\Box\varphi =_{def} \neg \sim \varphi$$

$$\Diamond\varphi =_{def} \sim \neg\varphi$$

Zřejmě platí

$$\neg\Box\varphi = \sim \varphi$$

$$\neg\Diamond\varphi = \sim\sim \neg\varphi$$

To, co vyplývá z definic operátorů jistoty a možnosti, lze přehledně shrnout do těchto tabulek:

φ	$\Box\varphi$	$\sim \Box\varphi$	$\Box \sim \varphi$	$\neg\Box\varphi$	$\Box\neg\varphi$
1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
$\times$	0	1	1	1	0

φ	$\Diamond\varphi$	$\sim \Diamond\varphi$	$\Diamond \sim \varphi$	$\neg\Diamond\varphi$	$\Diamond\neg\varphi$
1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
$\times$	1	0	1	0	1

Všimněme si, že se obě tabulky liší pouze ve třetím řádku, což znamená, že oba operátory $\Box$ a $\Diamond$ jsou opět rozšířením klasických (dvouhodnotových) operátorů možnosti a nutnosti. Z těchto tabulek můžeme vyčíst řadu ekvivalencí (v klasickém, tj. dvouhodnotovém smyslu). Lze ovšem definovat i trojhodnotové ekvivalence. Jednak ve striktním chápání (dvě formule jsou ekvivalentní, mají-li touž pravdivostní hodnotu) nebo v optimistickém pojetí (dvě formule jsou ekvivalentní, je-li možné, aby měly touž pravdivostní hodnotu).

Cvičení 5.2.2 *1. Nalezněte co nejvíce ekvivalentních vztahů mezi formulemi, v nichž jsou použity pouze symboly* $\neg, \sim, \Box$ *a* $\Diamond$.

2. Definujte trojhodnotové ekvivalence. Kolik je možno definovat takových trojhodnotových ekvivalencí?

3. Kolik různých dvouargumentových trojhodnotových spojek je možno definovat?

Čtenář teď již snadno ověří, že analogických výsledků dosáhneme také, když vyjdeme od externí pesimistické negace $\sim^p$.

Definice 5.2.2 *Definiční rovnosti pro* $\Box$ *a* $\Diamond$ *jsou pak tyto:*

$$\Diamond\varphi =_{def} \neg \sim^p \varphi$$

$$\Box\varphi =_{def} \sim^p \neg\varphi.$$

5.2.3 Axiomatizace a odvozování v trojhodnotové logice

Podobně jako v klasické výrokové logice byl hledán systém axiomů, ze kterého by bylo možno odvodit všechny tautologie trojhodnotové logiky v Łukasiewiczově smyslu. Takové systémy nalezli Łukasiewiczovi žáci, Wajsberg a Slupecki.

Wajsbergův systém trojhodnotové logiky obsahuje tyto axiomy

Axiom T1 $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

Axiom T2 $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

Axiom T3 $((\varphi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi$

Axiom T4 $(\neg\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

a obvyklá odvozovací pravidla, tj. modus ponens a pravidlo o substituci. Wajsbergův axiomatický systém je úplný a bezesporný.

5.2.4 Axiomatizace a odvozování v modálních logikách

V tomto odstavci si všimneme modální logiky z hlediska její axiomatické výstavby. Samozřejmě nejjednodušším systémem je modální výroková logika. Její jazyk vznikne z jazyka klasické dvouhodnotové logiky prostým přidáním dalšího symbolu $\Box$, který z výroku vytváří nový výrok, což znamená, že když V je výrok, tak $\Box V$ je také výrok, který budeme ve shodě s tím, co bylo řečeno v předchozích odstavcích, číst *nutně platí* V.

Axiomatických systémů výrokové logiky je známa celá řada. Historicky nejstarším, snad proto že patří k nejjednodušším, je systém S5 [5], který (viz dále) vedle axiomů klasické výrokové logiky obsahuje tyto axiomy týkající se pojmu nutnosti:

$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$

$\neg\Box\neg\varphi \Rightarrow \Box\neg\Box\neg\varphi$

a distributivnost nutnosti vůči implikaci, tj.

$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$

a pro odvozování *modus ponens* a nové pravidlo *zavedení operátoru nutnosti*

$$\frac{\varphi}{\Box\varphi}.$$

Aby však bylo zřejmé, o čem je řeč, je nezbytné říci něco bližšího o sémantice modálních logik. Ta byla podána v Kripkeho publikaci [39].

Kripke vychází z Leibnizova pojetí *možných světů*, což pro nás z logického hlediska bude libovolná neprázdná (nekonečná) množina, kterou označíme W. Pro nás v tuto chvíli bude důležité, že na množině W je definována binární relace $R \subseteq W \times W$, která určuje dosažitelnost či alternativnost možných světů. To tedy znamená, že ke každému světu $w \in W$ je určena množina možných světů z něj dosažitelných (s ním alternativních). Potom řekneme, že formule $\Box\varphi$ je pravdivá ve světě w, jestliže φ je pravdivá ve všech světech dosažitelných z w. Analogicky, $\Diamond\varphi$ je pravdivá ve světě w, jestliže existuje svět alternativní světu w, v němž je pravdivá formule φ.

Nyní je zřejmé, že ale záleží na tom, jaké vlastnosti má konkrétní relace R dosažitelnosti (či alternativnosti).

Byly studovány různé systémy modálních logik vzhledem k vlastnostem relace dosažitelnosti. Mezi nejznámější patří systémy $K, D, T, S4$ a $S5$. Pro ně mj. platí ([65]): Systém K neklade žádné omezení na relaci alternativnosti, je tedy nejslabším modálním systémem. Jestliže od relace R požadujeme, aby ke každému světu existoval aspoň jeden

[5] Označení pochází od C. I. Lewise.

alternativní svět, pak mluvíme o systému D, v němž platí

$$\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi.$$

Jestliže R je reflexivní, jde o systém T a platí

$$\Box\varphi \Rightarrow \varphi,$$

Jestliže navíc R je tranzitivní, jedná se o systém $S4$, v němž platí

$$\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi,$$

A konečně, jestliže R je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tj. je-li to relace ekvivalence, jedná se o Lewisův systém $S5$, ve kterém navíc platí formule

$$\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi.$$

Z vlastností relací R je zřejmé, že každý následující systém modální logiky v pořadí $K, D, T, S4, S5$ je rozšířením předchozího.

Zajímavá je interpretace termínu možnosti, když R je lineárním uspořádáním. Pak lze takovou modální logiku interpretovat jako časovou logiku (*tense logic*). Jestliže R je uspořádání reprezentované konečnými stromy, lze termín nutnosti interpretovat jako dokazatelnost (v nějakém formálním kalkulu).

Teď se vrátíme k axiomatizaci modálních logik. Uvidíme, že takových systémů bude více. Budeme pracovat s následujícími axiomy:

Axiom M	$\Diamond\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$
Axiom K	$\Box(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\varphi \Rightarrow \Box\psi)$
Axiom T	$\Box\varphi \Rightarrow \varphi$
Axiom E	$\Diamond\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\varphi$
	(varianta) $\neg\Box\varphi \Rightarrow \Box\neg\Box\varphi$
Axiom D	$\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$
Axiom 4	$\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$
Axiom B	$\neg\varphi \Rightarrow \Box\neg\Box\varphi$ *(tzv. Brouwerova formule)*

Systémy S5 a S4 budou definovány takto:

S5 = K + T + E (+ M)
S4 = K + T + 4 (+ M)

Pro tyto a další modální systémy například platí následující vztahy obsažení:

$Cn(K) \subset Cn(T) \subset Cn(S4) \subset Cn(S5)$
$Cn(K) \subset Cn(T) \subset Cn(B) \subset Cn(S5)$

Poznámka: První axiom, který jsme zde označili **M**, je možno chápat spíše jako *definici* modality možnosti na základě nutnosti a negace. Ostatní označení je v literatuře o modalitách obvyklé.

Odvozovací pravidlo:

Z formule φ *odvoď* $\Box\varphi$.

Teď se ještě podrobněji seznámíme s modálním systémem S5. Ten požívá mezi ostatními modálními systémy jakési výsadní postavení; důvod lze hledat např. v tom, že sémantická relace alternativnosti mezi možnými světy je zde relace ekvivalence.

Následující formule jsou příklady **teorémů** platných v systému S5:

$\vdash \varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$
$\vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$
$\vdash \neg\Diamond(\varphi \wedge \neg\varphi)$
$\vdash \Box\Box\varphi \Rightarrow \varphi$
$\vdash \Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$
$\vdash \Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$
$\vdash \varphi \Rightarrow \Diamond\Diamond\varphi$
$\vdash \neg\Diamond\varphi \Leftrightarrow \Box\neg\varphi$
$\vdash \Diamond\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\varphi$
$\vdash \neg\Diamond\neg\Diamond(\varphi \vee \neg\varphi)$
$\vdash \Box(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\Box\varphi \wedge \Box\psi)$
$\vdash \neg\Diamond(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\Diamond\varphi \wedge \neg\Diamond\psi)$

Některé z nich postupně dokážeme:

Dokažme: $\vdash \varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$ **(1)**

1. $\vdash \Box\neg\varphi \Rightarrow \neg\varphi$ (axiom T)
2. $\vdash \neg\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\neg\varphi$ (kontrapozice)
3. $\vdash \varphi \Rightarrow \neg\Box\neg\varphi$ (dvojí negace)
4. $\vdash \Diamond\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\varphi$ (axiom M)
5. $\vdash \neg\Box\neg\varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$ (fi část u 4)
6. $\vdash \varphi \Rightarrow \Diamond\varphi$ (3,5 hypotetický sylogismus)

Dokažme: $\vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$ **(2)**

1. $\vdash \Diamond\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\neg\varphi$ (axiom M, substituce $\neg\varphi$ za φ)
2. $\vdash \Diamond\neg\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\varphi$ (dvojí negace)
3. $\vdash \Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\varphi$ (if část u 2)
4. $\vdash \neg\Box\varphi \Rightarrow \Diamond\neg\varphi$ (fi část u 2)
5. $\vdash \neg\neg\Box\varphi \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$ (kontrapozice)
6. $\vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$ (dvojí negace)

Dokažme: $\vdash \neg\Diamond(\varphi \wedge \neg\varphi)$ **(3)**

1. $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (tautologie)
2. $\vdash \Box\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (odvozovací pravidlo)
3. $\vdash \Box\neg(\varphi \wedge \neg\varphi) \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
   (předchozí teorém **(2)**, substituce $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ za φ)
4. $\vdash \Box\neg(\varphi \wedge \neg\varphi) \Rightarrow \neg\Diamond\neg\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (if část u 3)
5. $\vdash \neg\Diamond\neg\neg(\varphi \wedge \varphi)$ (2, 4 modus ponens)
6. $\vdash \neg\Diamond(\varphi \wedge \neg\varphi)$ (dvojí negace)

Dokažme: $\vdash \Box\Box\varphi \Rightarrow \varphi$ **(4)**

1. $\vdash \Box\varphi \Rightarrow \varphi$ (axiom T)
2. $\vdash \Box(\Box\varphi \Rightarrow \varphi)$ (odvozovací pravidlo)
3. $\vdash \Box(\Box\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow (\Box\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi)$ (axiom K)
4. $\vdash \Box\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$ (2, 3 modus ponens)
5. $\vdash \Box\Box\varphi \Rightarrow \varphi$ (hypotetický sylogismus 4, 1)

Dokažme: $\vdash \Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$ **(5)**

1. $\vdash \Diamond\Box\varphi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\Box\varphi$ (axiom M)
2. $\vdash \Diamond\Box\varphi \Rightarrow \neg\Box\neg\Box\varphi$ (if část 1)
3. $\vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$ (teorém (2))
4. $\vdash \Box\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$ (if část teorému 3)
5. $\vdash \neg\neg\Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\varphi$ (kontrapozice 4)
6. $\vdash \Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\varphi$ (dvojí negace)
7. $\vdash \Box(\Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\varphi)$ (odvozovací pravidlo)
8. $\vdash \Box(\Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Box\varphi) \Rightarrow (\Box\Diamond\neg\varphi \Rightarrow \Box\neg\Box\varphi)$ (axiom K)
9. $\vdash \Box\Diamond\neg\varphi \Rightarrow \Box\neg\Box\varphi$ (7, 8 modus ponens)
10. $\vdash \neg\Box\neg\Box\varphi \Rightarrow \neg\Box\Diamond\neg\varphi$ (kontrapozice 9)
11. $\vdash \Diamond\Box\varphi \Rightarrow \neg\Box\Diamond\neg\varphi$ (2, 10 hypotetický sylogismus)
12. $\vdash \Diamond\neg\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\neg\varphi$ (axiom E)
13. $\vdash \neg\Box\Diamond\neg\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$ (kontrapozice 12)
14. $\vdash \Diamond\Box\varphi \Rightarrow \neg\Diamond\neg\varphi$ (11, 13 hypotetický sylogismus)
15. $\vdash \neg\Diamond\neg\varphi \Rightarrow \Box\varphi$ (fi část 3)
16. $\vdash \Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$ (14, 15 hypotetický sylogismus)

Dokažme: $\vdash \Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$ **(6)**

1. $\vdash \Box\varphi \Rightarrow \Diamond\Box\varphi$ (teorém 1, substituce $\Box\varphi$ za φ)
2. $\vdash \Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\Box\varphi$ (axiom E)
3. $\vdash \Box\varphi \Rightarrow \Box\Diamond\Box\varphi$ (1,2 hypotetický sylogismus)
4. $\vdash \Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi$ (teorém 5)
5. $\vdash \Box(\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi)$ (odvozovací pravidlo)
6. $\vdash \Box(\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\varphi) \Rightarrow (\Box\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi)$ (axiom K)
7. $\vdash \Box\Diamond\Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$ (5,6 modus ponens)
8. $\vdash \Box\varphi \Rightarrow \Box\Box\varphi$ (3,7 hypotetický sylogismus)

5.3 Vlastnosti vícehodnotových a modálních logik

V tomto odstavci si všimneme základních vlastností neklasických logických systémů, a pak uvedeme několik zajímavých vlastností těchto systémů, které se opírají o pojem *stupně informačního uspořádání.*

5.3.1 Úplnost a rozhodnutelnost modální logiky

V rámci Kripkeho sémantiky platí: Systém modální logiky S5 je podobně jako výrokový kalkul úplný a rozhodnutelný. (Viz např. [39].)

5.3.2 Další vlastnosti logických kalkulů

Nejprve několik definic.

Definice 5.3.1 *Logický systém je*

1. perzistentní, *když pravdivé (resp. nepravdivé) formule zůstávají pravdivými (resp. nepravdivými), i když jsou přidány další formule.*
2. koherentní, *jestliže libovolná formule nemůže být současně pravdivá i nepravdivá v témže modelu.*
3. determinovaný, *jestliže každá formule je determinovaná, tj. pravdivost nebo nepravdivost formule je jednoznačně určena v úplném modelu.*
4. spolehlivý, *jestliže pravdivost (resp. nepravdivost) formule v částečném modelu má za následek její pravdivost (resp. nepravdivost) i v každém informačním zúplnění.*

Můžeme ověřit, že platí následující tvrzení:

Tvrzení 5.3.1 *Jestliže systém je perzistentní a determinovaný, pak je spolehlivý.*

Tvrzení 5.3.2 *Kleeneho trojhodnotová logika je koherentní, determinovaná, perzistentní, a tudíž i spolehlivá.*

5.3.3 Varianty modálních logik

V posledních desetiletích se intenzivně studují varianty modálních logik, které jsou motivovány rozmanitými idejemi od epistemických po výpočtové. Pro orientaci uvedeme alespoň odkazy na hlavní směry. Důležité zde je to, že z jednoho společného východiska pak v závislosti na určité motivaci vytváříme aplikačně zaměřené systémy. Tak např. ve všech uvedených systémech použijeme něco, co bychom mohli nazvat de Morganovy zákony modálních logik, tj. $\Diamond\varphi =_{df} \neg\Box\neg\varphi$. Musíme si ale být vědomi toho, jak se proměňuje koncept negace. Mezi nejintenzivněji studované patří například:

Epistemická logika

$\Box\varphi \ldots$ je známo, že φ
$\Diamond\varphi \ldots$ opak tvrzení φ není znám

Logika přesvědčení (logic of beliefs)

$\Box\varphi \ldots$ věří se, že (panuje názor, že) φ
$\Diamond\varphi \ldots$ v opak φ se nevěří (nepanuje názor)

Deontická logika

$\Box\varphi \ldots$ musí být φ
$\Diamond\varphi \ldots$ je (morálně) dovoleno, že φ

Časová logika (tense logic)

$\Box\varphi \ldots$ vždy bude pravda, že φ
$\Diamond\varphi \ldots$ někdy bude pravda φ

Dynamická (algoritmická) logika

$\Box\varphi \ldots$ po každém ukončení běhu programu je pravda φ
$\Diamond\varphi \ldots$ existuje běh programu, po jehož ukončení je pravda φ

5.4 Vícehodnotové a fuzzy logiky

Snad nejpopulárnější neklasickou logikou je v současné době fuzzy logika. Tato popularita je dána především praktickým požíváním výsledků fuzzy logiky v řadě oblastí, zejména v regulaci. Většina výrobců praček se dnes chlubí fuzzy regulátory, těmi jsou dnes vybaveny i některé fotoaparáty, automatické převodovky aj.

Nás ovšem budou zajímat matematické základy fuzzy logiky jako nástroje přibližného usuzování (approximate reasoning). V tomto smyslu je fuzzy logika zobecněním logiky vícehodnotové.

My se budeme věnovat pouze výrokové fuzzy logice, která je samozřejmě nejjednodušší (existuje ovšem i predikátová fuzzy logika), a uvedeme zde pouze některé ideje a případné vážné zájemce odkážeme na knihu Petr Hájka *Metamathematics of fuzzy logic* [22].

Obor pravdivostních hodnot rozšíříme tak, že jím bude interval $[0,1]$, kde 1 označuje absolutní pravdu, 0 absolutní nepravdu. Proč se bere právě interval $[0,1]$? Částenou odpovědí je to, že chceme, aby fuzzy logiky byly zobecněním klasických logik, což znamená, že 0 a 1 musejí být krajními hodnotami oboru hodnot. Oborem hodnot by tedy mohla být nějaká podmnožina tohoto intervalu obsahující obě krajní hodnoty. Interval $[0,1]$ je však dostatečně obecný; přirozené uspořádání reálných čísel zde hraje důležitou roli — naše pravdivostní hodnoty lze lineárně uspořádat.[6]

Důležitou vlastností fuzzy logik, stejně jako logik klasických či vícehodnotových (a narozdíl od logik modálních, či logiky intuicionistické) je jejich extenzionalita. To znamená, že např. pravdivostní hodnotu formule $\varphi \vee \psi$ určíme na základě pravdivostních hodnot formulí φ a ψ pomocí nějaké pravdivostní funkce $\vee^\star : [0,1]^2 \to [0,1]$. Tato funkce ovšem nemůže být libovolná — stále musíme mít na paměti, že fuzzy logika má být *rozšířením* logiky klasické, a tedy pro krajní hodnoty 0 a 1 se funkce $\vee^\star$ musí chovat "klasicky", tj. musí splňovat rovnosti $\vee^\star(1,1) = 1$, $\vee^\star(1,0) = 1$, $\vee^\star(0,1) = 1$ a $\vee^\star(0,0) = 0$.

Základní spojkou (a samozřejmě i pravdivostní funkcí) fuzzy logiky bude pro nás tzv. *silná konjunkce* &,[7] všechny ostatní spojky z ní budou odvozeny.

Naše intuitivní chápání konjunkce je následující: "velká" hodnota $\varphi \& \psi$ by měla naznačovat, že pravdivostní hodnoty jak φ tak i ψ jsou "velké". Je tudíž přirozené přepokládat, že hledaná pravdivostní funkce je neklesající v obou proměnných. Tento požadavek je (společně s výše uvedeným požadavkem, aby se krajní hodnoty intervalu chovaly "klasicky") splněn v následující definici.

Definice 5.4.1 *Binární operátor t na $[0,1]$ (tj. $t : [0,1]^2 \to [0,1]$) nazveme triangulární normou (zkráceně t-normou) t, jestliže splňuje následující tři podmínky:*

(i) okrajové podmínky: pro libovolné $a \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned} t(1,a) &= a, \\ t(0,a) &= 0; \end{aligned}$$

[6] Jsou ovšem studovány i fuzzy logiky s hodnotami v čeástečně uspořádaných strukturách, např. ve svazech.

[7] V klasické kogice splývá s běžnou konjunkcí $\wedge$; později uvidíme, jaký je vztah silné konjunkce a konjunkce ve fuzzy logice.

(ii) izotonicita: pro libovolné $a_1, a_2, b_1, b_2 \in [0,1]$ *takové, že* $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$ *platí*

$$t(a_1, b_1) \leq t(a_2, b_2);$$

(iii) asociativita a komutativita: pro libovolné $a, b, c \in [0,1]$ *platí*

$$\begin{aligned} t(t(a,b),c) &= t(a,t(b,c)), \\ t(a,b) &= t(b,a). \end{aligned}$$

t-norma t se nazývá spojitá, je-li t spojitá funkce.[8]

Z této definice je zřejmé, že libovolná t-norma je zobecněním spojky konjunkce a splňuje náš požadavek týkající se "velkých" hodnot.

Příklad 5.4.1 *Tři nejvýznamnější spojité t-normy jsou:*

(i) Gödelova t-norma: $t_G(a,b) = \min(a,b)$*;*

(ii) součinová t-norma: $t_p(a,b) = a \cdot b$*;*

(iii) Łukasziewiczova t-norma: $t_L(a,b) = \max(0, a+b-1)$.

Čtenář zajisté snadno ověří, že výše uvedené t-normy splňují podmínky uvedené v definici 5.4.1.

Nyní věnujeme svoji pozornost implikaci, což je pro logiku vždy téma z nejdůležitějších. Ve dvouhodnotové logice, jak víme, je implikace $\varphi \Rightarrow \psi$ pravdivá, je-li pravdivostní hodnota φ menší nebo rovna pravdivostní hodnotě ψ. Tento fakt lze zobecnit v následujícím smyslu: "velká" pravdivostní hodnota implikace $\varphi \Rightarrow \psi$ naznačuje, že pravdivostní hodnota formule φ "není o moc větší" než pravdivostní hodnota jejího závěru, tj. formule ψ. To vede k požadavku, aby pravdivostní funkce implikace $i(x,y)$ byla nerostoucí v proměnné x a neklesající v proměnné y. K tomu nám dobře poslouží následující pojem.

Definice 5.4.2 *Nechť $x, y \in [0,1]$ a t je spojitá t-norma. t-reziduum $i_t(x,y)$ je definováno rovností*

$$i_t(x,y) = \sup\{z \in [0,1]; t(x,z) \leq y\}.$$

[8]Nahradíme-li okrajové podmínky (i) podmínkami

$$\begin{aligned} t(1,a) &= 1, \\ t(0,a) &= a, \end{aligned}$$

dostaneme definici *t-conormy*, která však z hlediska budoucího výkladu nemá hlubší smysl.

Pro libovolnou spojitou t-normu t je t-reziduum $i_t(a,b)$ největším řešením rovnice

$$t(a,x) = t(x,a) = b.$$

Tato vlastnost zaručuje, že se pravidlo *modus ponens* bude ve fuzzy logice chovat "rozumně", tj. že z pravdivostní hodnoty x formule φ a pravdivostní hodnoty $i(x,y)$ formule $\varphi \Rightarrow \psi$ "spočte" dolní hranici pravdivostní hodnoty y formule ψ. Na druhou stranu definuje pravdivostní hodnotu $i(x,y)$ formule $\varphi \Rightarrow \psi$ co největší, aby bylo toto dedukční pravidlo dostatečně silné.

Příklad 5.4.2 *Pro libovolnou spojitou t-normu t platí $i_t(x,y) = 1$, jestliže $x \leq y$ a pro výše uvedené t-normy dostáváme pro $x > y$ následující t-rezidua:*

(i) Gödelova implikace: $i_G(x,y) = y$,

(ii) Goguenova implikace: $i_p(x,y) = \frac{y}{x}$,

(iii) Łukasziewiczova implikace: $i_L(x,y) = 1 - x + y$.

Zvolíme-li nějakou spojitou t-normu, je tím již určena výroková fuzzy logika. Přesněji řečeno, dostáváme následující důležité definice.

Definice 5.4.3 *Jazyk* výrokové fuzzy logiky $VL(t)$, která je určená t-normou t *sestává z výrokových proměnných $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ (případně opatřených indexy), výrokových spojek silné konjunkce & a implikace $\Rightarrow$ a z výrokové konstanty $\bar{0}$.*

Definice 5.4.4 Formule *jsou definovány obvyklým způsobem (srovnej s definicí formule v klasické výrokové logice):*

1. *Každá výroková proměnná je formule.*
2. *$\bar{0}$ je formule.*
3. *Jsou-li φ a ψ formule, pak i $\varphi \& \psi$ a $\varphi \Rightarrow \psi$ jsou formule.*
4. *Žádné jiné formule neexistují.*

Definice 5.4.5 *Ostatní výrokové spojky jsou definovány následujícím způsobem:*

$$\begin{aligned}
(\neg\varphi) &\overset{def}{\Leftrightarrow} (\varphi \Rightarrow \bar{0}),\\
(\varphi \wedge \psi) &\overset{def}{\Leftrightarrow} (\varphi \& (\varphi \Rightarrow \psi)),\\
(\varphi \vee \psi) &\overset{def}{\Leftrightarrow} ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \psi) \wedge ((\psi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)),\\
(\varphi \Leftrightarrow \psi) &\overset{def}{\Leftrightarrow} ((\varphi \Rightarrow \psi) \& (\psi \Rightarrow \varphi)).
\end{aligned}$$

Definice 5.4.6 Ohodnocení výrokových proměnných *je zobrazení val přiřazující každé výrokové proměnné φ její pravdivostní hodnotu $val(\varphi) \in [0,1]$. Na ostatní formule se toto ohodnovení rozšíří jednoznačně podle následujících pravidel:*

$$\begin{aligned} val(\bar{0}) &= 0, \\ val(\varphi \& \psi) &= t(val(\varphi), val(\psi)), \\ val(\varphi \Rightarrow \psi) &= i_t(val(\varphi), val(\psi)). \end{aligned}$$

Vyskytují-li se ve formuli jiné spojky než silná konjunkce & a implikace $\Rightarrow$, je samozřejmě třeba při hledání ohodnocení této formule využít definičních rovností těchto spojek uvedených v definici 5.4.5. Ne vždy je to však nutné, neboť platí následující

Lemma 5.4.1 *Pro libovolné formule φ a ψ platí:*

$$\begin{aligned} val(\varphi \wedge \psi) &= \min\{val(\varphi), val(\psi)\}, \\ val(\varphi \vee \psi) &= \max\{val(\varphi), val(\psi)\}. \end{aligned}$$

Z tohoto lemmatu je ihned vidět, že v Gödelově logice, tj. $VL(t_G)$ je silná konjunkce & ekvivalentní obvyklé konjunkci $\wedge$. Zároveň se ukazuje, proč se konjunkci & říká silná — pro libovolnou t-normu t totiž platí:

$$t(x,y) \leq \min(x,y),$$

což plyne přímo z definice t-normy, a tudíž platí

$$val(\varphi \& \psi) \leq val(\varphi \wedge \psi).$$

Definice 5.4.7 *Formule φ je* 1-tautologie *$VL(t)$, jestliže $val(\varphi) = 1$ pro libovolné ohodnocení val.*

To znamená, že 1-tautologie jsou absolutně pravdivé při libovolném ohodnocení. Je však třeba říci, že pro dvě různé t-normy t_1 a t_2 jsou množiny jejich 1-tautologií obecně různé. Následující formule jsou však 1-tautologiemi libovolné $VL(t)$ (pro spojitou t-normu t).

Axiom VL(t)1 $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

Axiom VL(t)2 $(\varphi \& \psi) \Rightarrow \varphi$

Axiom VL(t)3 $(\varphi \& \psi) \Rightarrow (\psi \& \varphi)$

Axiom VL(t)4 $(\varphi\&(\psi\&\chi)) \Rightarrow ((\varphi\&\psi)\&\chi)$

Axiom VL(t)5a $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow ((\varphi\&\psi) \Rightarrow \chi)$

Axiom VL(t)5b $((\varphi\&\psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)$

Axiom VL(t)6 $((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow (((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \chi) \Rightarrow \chi)$

Axiom VL(t)7 $\bar{0} \Rightarrow \varphi$

Dedukčním pravidlem výrokové fuzzy logiky je *modus ponens*. Pojmy důkaz a dokazatelná formule jsou definovány obvyklým způsobem. Dostáváme tudíž

Lemma 5.4.2 *Jsou-li φ a $\varphi \Rightarrow \psi$ 1-tautologie $VL(t)$, pak i ψ je 1 tautologie $VL(t)$. Tudíž: Každá formule dokazatelná z výše uvedených axiomů je 1-tautologie $VL(t)$.*

Z výše uvedených axiomů lze odvodit řadu užitečných vlastností jednotlivých spojek jako jsou komutativita a asociativita konjunkce a disjunkce, distributivita konjunkce vzhledem k disjunkci a naopak, ale též distributivita silné konjunkce vzhledem ke konjunkci i disjunkci.

Zajímavá je obdoba známé (a hojně využívané) věty o dedukci, kterou zde uvedeme.

Tvrzení 5.4.1 *Nechť T je teorie a φ, ψ jsou formule. $T \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, právě když existuje n takové, že $T \vdash \varphi^n \Rightarrow \psi$ (kde φ^n značí $\varphi\& \cdots \&\varphi$, n-krát).*

Nutno poznamenat, že v obecné $VL(t)$ nelze dokázat dedukční větu tak, jak je známá z klasické výrokové logiky. Platí však

Tvrzení 5.4.2 1. *Nechť $t = t_G$, pak pro každou teorii T nad $VL(t_G)$ a pro každé dvě formule φ, ψ platí:*

$$T \cup \{\varphi\} \vdash \psi, \text{ právě když } T \vdash \varphi \Rightarrow \psi.$$

2. *$VL(t_G)$ je jediná $VL(t)$, v níž platí klasická věta o dedukci, tj. jestliže ve $VL(t)$ platí věta o dedukci, pak $t = t_G$.*

Cvičení 5.4.1 *Ukažte, že:*

1. *Ve $VL(t_G)$ a $VL(t_p)$ platí zákon sporu $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$, zatímco ve $VL(t_L)$ neplatí.*
2. *Ve $VL(t_L)$ platí zákon vyloučeného třetího $\varphi \vee \neg\varphi$, zatímco ve $VL(t_G)$ ani $VL(t_p)$ neplatí.*

3. *Ve $VL(t_G)$, $VL(t_p)$ i $VL(t_L)$ platí implikace $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$, zatímco obrácená implikace $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$ platí pouze ve $VL(t_L)$. Zákon dvojí negace tedy platí pouze v Łukasziewiczově logice.*

Odpověď: Všechna cvičení jsou založena na práci s t-normami a t-rezidui. Uvedeme podrobnější návod k 1. cvičení — ostatní důkazy jsou analogické.

1. Nechť $val(\varphi) = a \in (0,1)$.[9] Pak (vzhledem k definici negace) dostáváme pro Gödelovu t-normu
$$val_G(\neg\varphi) = i_G(a,0) = 0$$
a obdobně pro součinovou t-normu
$$val_P(\neg\varphi) = i_p(a,0) = 0,$$
zatímco pro Łukasziewiczovu t-normu máme
$$val_L(\neg\varphi) = i_L(a,0) = 1 - a.$$
Máme tudíž
$$val_G(\varphi\neg\varphi) = val_p(\varphi\neg\varphi) = \min(a,0) = 0$$
zatímco
$$val(\varphi\neg\varphi) = \min(a, 1-a) \neq 0.$$
Odtud konečně dostáváme pro Gödelovu i součinovou t-normu
$$val_G(\neg(\varphi\neg\varphi)) = val_p(\neg(\varphi\neg\varphi)) = 1,$$
neb $i_t(0,0) = 1$ pro libovolnou spojitou t-normu t, ale
$$val_L(\neg(\varphi\neg\varphi)) = 1\min(a, 1-a) \neq 1.$$

5.5 Intuicionistická logika

Vznik intuicionistické logiky byl motivován poněkud jinak než vznik vícehodnotových a modálních logik. V intuicionistické logice šlo především o reakci na krizi v základech matematiky.

Souběžně s axiomatizací teorie množin se rozvinula hluboká a radikální kritika klasické matematiky ze zcela jiných pozic. Bylo poukázáno na to, že v klasické teorii množin je

[9] Pokud $val(\varphi) = 0$ nebo $val(\varphi) = 1$, jedná se o klasickou dvouhodnotovou logiku a zákon sporu platí pro libovolnou souvislou t-normu.

nedostatečně a nejasně vymezen pojem *nekonečna*, který je pro matematické uvažování životně důležitý.

Dále bylo poukázáno na to, že matematika se za staletí nedokázala oprostit od residuí tomistické absolutizace aristotelské logiky. Veškerá logika, která byla až dosud v matematice používána, byla odvozena ze zkušenosti o konečných množinách a byla nekriticky přenesena i do úvah o nekonečnu. Z tohoto hlediska pak byly antinomie sekundárním jevem, který se objevil v teorii množin právě proto, že pojem nekonečna je zde tak často, široce a nepřesně používán.

5.5.1 Základní intuicionistické ideje

Snad nejznámější intuicionistickou tezí je odmítání platnosti principu vyloučení třetího (*tercium non datur*) v logice. Není to však zdaleka teze nejdůležitější, protože je pouhým důsledkem vůbec naprosto odlišného chápání matematiky, než jak tomu bylo v do-intuicionistické éře běžné. Intuicionisté především chápou matematiku jako *myšlenkovou činnost*. Předmětem matematiky, podle jejich představ, jsou vysoce abstraktní racionální konstrukce. Tím je vyzvednut *konstruktivní charakter* veškeré matematické činnosti. Konstruktivnost se tak stává nutnou a postačující podmínkou existence matematických předmětů. Tímto ztotožněním existence a konstruktivnosti je podle intuicionistů určena samotná povaha matematiky. Konstruktivnost je tak nejdůležitějším kriteriem, které umožňuje určit přípustnost dané matematické činnosti (odvozovacích a dokazovacích prostředků apod.).

V důsledku toho je běžným matematickým a logickým výrazům dáván jiný smysl, než jak tomu bylo dříve. Například univerzální výrok *všechna přirozená čísla n mají vlastnost F* je v intuicionistickém pojetí nutno chápat jako hypotetický výrok, který nás zpravuje o tom, že jestliže je dáno nějaké (ale jinak libovolné) přirozené číslo n, potom toto číslo má vlastnost F. To souvisí s odlišným chápáním podstaty nekonečna. Na rozdíl od klasické matematiky, která, jak jsme viděli, chápe nekonečno *existenciálně*, jako završený a neměnný soubor předmětů, z nichž každý je aktuálně poznatelný, uznávají intuicionisté nekonečno pouze v *konstruktivním* smyslu, tj. ve smyslu proměnného, vytvářejícího se souboru předmětů, jehož proces konstruování právě nemůže být nikdy ukončen.

Na základě této představy není vlastně žádný univerzální výrok v nekonečné oblasti konstruktivní, což je právě způsobeno nemožností aktuálního prozkoumání nekonečné utvářející se řady. Toto je také důvod, proč z intuicionistického hlediska nemůžeme vždy beztrestně přejít (podle de Morganových pravidel) od universálních výroků k existenčním, či naopak.

Teď už můžeme snadno ukázat, jaké motivy vedly intuicionisty k dnes už až příliš proslulému zřeknutí se platnosti principu *tertium non datur*. Především je třeba říci, že tento princip byl zachován v úvahách o *konečných* oblastech a že jeho revize byla vyvolána právě radikální změnou v pojetí nekonečna, nebo přesněji, požadavkem konstruktivnosti.

Princip vyloučení třetího říká, že pro libovolnou větu p platí $p \vee \neg p$. Uvažujme tedy případ, kdy věta p je věta *existuje prvek x množiny M takový, že x má vlastnost F*. Potom $\neg p$ je věta *není pravda, že existuje takový prvek x množiny M, že má vlastnost F*, jinými slovy, *každý prvek x množiny M má vlastnost $\neg F$*. Princip *tertium non datur* tedy pro naši větu říká, že *existuje prvek x množiny M, který má vlastnost F nebo každý prvek x množiny M má vlastnost $\neg F$*. Jestliže množina M je konečná, a jestliže vlastnost F je taková, že o každém prvku dané množiny lze rozhodnout, zda má vlastnost F či nikoli, je principiálně možné buď takový prvek x nalézt, anebo se přesvědčit o tom, že všechny prvky množiny mají vlastnost $\neg F$. V takovém případě není nutné pochybovat o platnosti principu vyloučení třetího. Zcela odlišná je situace v nekonečných množinách, neboť zde není v důsledku intuicionistického chápání žádná možnost ukončit prozkoumávání dané nekonečné množiny M.

Z tohoto hlediska se ukazuje, že princip *tertium non datur* vyjadřuje v matematických úvahách *očekávání řešitelnosti* úlohy, přitom toto očekávání je podle intuicionistů spíše skeptické (to je srovnatelné s podobným výsledkem Gödelovy věty o neúplnosti). Není ovšem vyloučeno, že nějakou úvahou se nám v některé konkrétní úloze podaří zjistit, že žádný z prvků množiny M nemá vlastnost F, nebo nalezneme prvek, který tuto vlastnost má. To ale nic nemění na obecné neplatnosti tohoto principu.

Můžeme to demonstrovat na dvou známých matematických problémech. Prvním je *problém čtyř barev*, otázka, zda je možno geografickou mapu (graf v matematickém slova smyslu), která obsahuje n území, obarvit nejvýše čtyřmi barvami tak, aby žádná dvě území, mající společnou hranici, nebyla obarvena stejnou barvou. Tento problém nebyl ještě nedávno obecně rozřešen (pro dosti malá n bylo známo, že je pravdivý), ale řešení problému je principiálně možné, protože pro libovolné pevné n předpokládá sice velký (budou značné praktické obtíže), ale *konečný* počet kroků.[10]

Jiného druhu je problém *Fermatovy věty*, která říká, že neexistuje trojice přirozených čísel, která by vyhovovala rovnici

$$x^n + y^n = z^n,$$

kde n je libovolné přirozené číslo větší než 2.

Zde je situace podstatně odlišná, protože pro libovolné pevné n je třeba prozkoumat nekonečně mnoho trojic přirozených čísel. Je příznačné, že přes veškeré úsilí, které bylo problému věnováno, dlouho nebyla známa trojice čísel, která by uvedené podmínce vyhovovala pro nějaké n a rovněž pro nekonečně mnoho n nebyla známa platnost či

[10]Problém čtyř barev byl nedávno rozřešen s podstatným využitím počítače.

neplatnost této věty[11], a přesto není dokazatelná formule

$$(\forall n > 2)\neg(\exists x \exists y \exists z)\ x^n + y^n = z^n.$$

5.5.2 Filozofické základy intuicionismu

Intuicionistické ideje působily na rozvoj matematického myšlení nejen extenzívně (byla vypracována intuicionistická logika, intuicionistická analýza apod.), ale i směrem k vnitřní stavbě a struktuře intuicionismu. Uvedli jsme už několik základních principů a ukázali souvislosti mezi nimi.

Fakt, že matematika byla chápána jakožto myšlenková činnost, měl svůj výrazný obraz ve zcela novém pohledu na funkci jazyka v matematice a ve vědě vůbec, a na jejich vzájemnou souvislost. Jestliže až dosud byl vztah jazyka a matematiky dáván obvykle do přímé souvislosti a rozvoj matematiky a vědy podmiňován rozvojem jazyka, je v pojetí holandské školy jazyk odsouzen do velmi podřadné role jakéhosi velmi nedokonalého zprostředkovatele. Proces myšlení je odpoután od jazyka, a ten je používán pouze jako prostředek sdělování myšlenek. Avšak toto sdělování je značně nepřesné, je zatíženo nedokonalostí jazykových výrazů, a to jak výrazů běžného jazyka, tak jazyka formalizovaného. Navíc určité signály jsou u různých lidí asociovány s různými předměty a často jsou i tyto asociace proměnlivé. Jazyk v nejlepším případě může u posluchače vyvolat určitou excitaci vůle, která jej může (ale nemusí) přivést k myšlenkovým operacím podobným těm, které prováděl ten, kdo sděloval. Důsledně tedy vzato, pěstování matematiky se v čisté formě děje v podobě *koexistence matematiků*. Vůbec z tohoto hlediska je správnější klást ne otázku *co je matematika*, ale spíše *jak se děje matematika*.

Tak podle Brouwera jsou matematika a jazyk specifické lidské činnosti, jejichž základ spočívá v operacích třech druhů. V matematické konstrukci, matematické abstrakci a v excitaci vůle prostřednictvím určitých signálů (písmen, zvuků apod.). Tato třetí složka se právě týká jazyka. Volní akt, který byl realizován v matematické abstrakci nebo na vyšší úrovni v matematické konstrukci, se *projevuje* v jazyce, aby opět působil ke vzbuzení vůle, což má za následek vznik nových myšlenkových operací. Je tím zároveň zprostředkována jakási nepřesná komunikace, jejímž cílem je z důvodu nedokonalosti spíše další rozvíjení volních aktů než přímý přenos informace. Tato nemožnost přímého přenosu informace není způsobena pouze jazykem, ale hlavně tou růzností asociací, která už netkví v povaze jazyka. Plyne z toho tedy, že nemůže existovat žádný

[11] Těsně před odevzdáním tohoto textu do tiskárny pro *první* vydání byla publikována zpráva (P. Vopěnka: Lidové noviny, 13. 7. 1993) o tom, že 23. června 1993 Andrew Wiles na přednášce v Cambridge tento 350 let starý problém vyřešil tak, že větu dokázal. Bylo, a stále ještě je zajímavé sledovat jednak, jak ověřování toho, že řešení je správné, postupovalo s námahou, protože důkaz je nesmírně komplikovaný, jednak jaké to bude mít důsledky pro další rozvoj matematiky a logiky. Ve výše zmíněném článku P. Vopěnka podal zajímavý rozbor možných důsledků. My teď už víme, že důvěra ve správnost Wilesova výsledku je velmi vysoká, takže ty správné důsledky už můžeme vyznačit.

pro matematiku vhodný jazyk, který by zabezpečil dokonalé sdělení.

Prototypem matematické konstrukce je metoda matematické indukce neboli *prvotní intuice* (*Urintuicion*) přirozeného čísla. Přitom se, přesně řečeno, přijímá vlastně jen princip konstruování nekonečné vytvářející se řady čísel, nikoli množina těchto čísel. V tzv. konstruktivistické matematice má tato prvotní intuice podobu intuice o opakování nějaké jednoduché operace, která může být kdykoli a libovolněkrát realizována, např. připisování čárky zprava. To, že intuici o přirozených číslech máme, je jistě pravda. Zda je to však jediný základ matematiky, může být ovšem předmětem diskuse. Co je však překvapující, je neobyčejná shoda v této intuici u různých lidí. Jaké jsou důvody této shody? Vzniká tak otázka, zda není tato *prvotní intuice* složitěji strukturovaná a odkud se taková intuice bere (popřípadě další intuice). Zda je určena předchozí zkušeností lidstva nebo v průběhu jakých činností je získávána, pomineme-li možnost jejího apriorního charakteru.

5.5.3 Syntaktický systém intuicionistické logiky

Filozofii intuicionistů vlastně tvorba axiomatického systému právě neodpovídala, Brouwer žádný takový systém nenavrhl, ale přesto byl takový axiomatický systém později vytvořen. Hlavní podíl na tom měl Arend Heyting (viz též následující odstavec).

Začneme axiomy pro výrokovou intuicionistickou logiku. Jazyk obsahuje čtyři výrokové spojky $\neg, \Rightarrow, \vee, \wedge$. Axiomy vyslovíme se syntaktickými proměnnými, které budou zastupovat libovolné dobře utvořené formule intuicionistické logiky. Jde tedy o schemata axiomů.

Axiom I1 $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$

Axiom I2 $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi))$

Axiom I3 $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi \wedge \psi)$

Axiom I4 $(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \varphi$

Axiom I5 $\varphi \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$

Axiom I6 $(\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\psi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi \Rightarrow \chi))$

Axiom I7 $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \neg\psi) \Rightarrow \neg\varphi)$

Axiom I8 $\varphi \Rightarrow (\neg\varphi \Rightarrow \psi)$

Odvozovacím pravidlem je obvyklé *modus ponens.*

Pro axiomatiku intuicionistické logiky je zajímavé, že zde není možné nalézt jednodušší systém axiomů, který by obsahoval méně výrokových spojek, jak to dobře známe z klasické výrokové logiky. Čtyři intuicionistické spojky negace, implikace, konjunkce a disjunkce nejsou vzájemně definovatelné, nejsou pochopitelně ani extenzionální při použití dvou pravdivostních hodnot. Extenzionální (tabulková) charakteristika všech čtyř intuicionistických výrokových spojek byla nalezena až později.

Kromě vlastního filozofického základu intuicionistické logiky, který spočívá v odlišném náhledu na nekonečno, nachází tato logika uplatnění právě při studiu samotného pojmu dokazatelnosti. [6].

5.5.4 Vztah intuicionistické logiky a trojhodnotové logiky

Arend Heyting[12] nalezl pravdivostní tabulky pro čtyři základní spojky intuicionistické logiky, když užil tří pravdivostních hodnot: 1, 0, $\times$. Heytingovy tabulky jsou pro negaci, konjunkci a disjunkci shodné s nám dobře známými tabulkami Kleeneho trojhodnotové logiky. Tabulka pro implikaci je následující:

φ	ψ	$\Rightarrow$
1	1	1
1	0	0
1	$\times$	$\times$
0	1	1
0	0	1
0	$\times$	1
$\times$	1	1
$\times$	0	0
$\times$	$\times$	1

To tedy znamená, že třetí hodnota je interpretována jako možnost. V této interpretaci je možné ukázat, že všechny axiomy intuicionistické logiky nabývají hodnoty 1 a že i odvozovací pravidla jsou korektní, tj. že od formulí s hodnotou 1 vedou k formulím s hodnotou 1. To však neplatí obráceně. Existují formule, které, ač nabývají hodnoty 1 pro všechny hodnoty proměnných, nejsou dokazatelnými formulemi intuicionistické logiky. Příkladem je formule

$$(\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\psi \Rightarrow \varphi).$$

Tato formule není platnou formulí intuicionistické logiky, avšak pro všechna udělení hodnot proměnným φ, ψ nabývá hodnoty 1.

Polský logik Jaśkowski nalezl adekvátní interpretaci intuicionistické logiky s nekonečně hodnotami. Kurt Gödel naopak ukázal, že pro intuicionistickou logiku nejen, neexistuje

[12] Holandský matematik, který položil formální základy intuicionistické logiky.

žádná trojhodnotová interpretace, ale dokonce pro libovolné přirozené číslo n neexistuje ani žádná n-hodnotová interpretace.

5.5.5 Topologická interpretace intuicionistické logiky

Zajímavou interpretaci intuicionistické logiky nalezl Alfred Tarski. Je to interpretace topologická a je založena na pojmu topologického prostoru, který lze definovat např. v terminologii *okolí bodu* anebo v terminologii *otevřených množin.*

Strukturou (topologickým prostorem), ve které budeme interpretovat zákony intuicionistické logiky, bude pro jednoduchost geometrická rovina, tj. množina E_2 s obvyklými operacemi průniku, sjednocení a doplňku. Nechť $M \subseteq E_2$. *Vnitřkem* $M^\star$ množiny M označíme množinu $\{x \in E_2; x \in M$ *a existuje okolí bodu* x*, které celé leží v* M $\}$. Řekneme, že množina M je *otevřená*, když $M = M^\star$. Prázdná množina i celá rovina E_2 jsou otevřené.

Formulím přiřadíme právě otevřené množiny. Vzhledem k tomu, že sjednocení i průnik dvou otevřených množin jsou opět otevřené množiny (to je elementární cvičení z teorie množin), je patrné, jak takovou interpretaci realizujeme. Vždy nepravdivé formuli *false* přiřadíme prázdnou množinu $\emptyset$, vždy pravdivé formuli *true* přiřadíme celou rovinu E_2. Konjunkci definujeme jako průnik odpovídajících otevřených množin, disjunkci jako sjednocení. Protože však doplněk otevřené množiny nemusí být otevřená množina, definujeme negaci jako $(E_2 - M)^\star$, tj. jako maximální otevřenou množinu disjunktní s M.

V této interpretaci zřejmě platí *zákon sporu* $M \wedge \neg M = \emptyset$, avšak neplatí princip *tercium non datur.* K tomu, abychom se o tom přesvědčili, stačí vzít za M polorovinu v E_2.

5.6 Vztahy mezi klasickou logikou a neklasickými systémy

V této kapitole jsme zběžně nahlédli do oblasti logických systémů, které vznikly ze značně rozmanitých motivů. Každý z neklasických logických systémů je kriticky zaměřen na některý z aspektů klasické logiky, který byl z metodologického hlediska chápán jako značné omezení vyjadřovacích prostředků. Většina kritických postojů vychází ze snahy přiblížit formální logické systémy běžnému způsobu vyjadřování znalostí a úsudků, tak jak to činíme v přirozeném jazyce. Je ovšem vlastností přirozeného jazyka, že termíny, které užíváme, jsou často vágní a nepřesné. Existence mnoha neklasických logických systémů nás vede k otázkám:

Jak je možné, že vedle sebe existují různé logické systémy?

Je jedna logika nebo jsou různé logiky?

Která logika je ta správná?

Přesvědčili jsme se, že existuje řada formálních systémů, které aspirují na to, že budou hrát úlohu logického systému, který je formulován v termínech implikace, negace, konjunkce a disjunkce. Každý z těchto systémů nějak *zpřesňuje* význam uvedených spojek přirozeného jazyka. Právě vágnost přirozeného jazyka vede k tomu, že vznikají různá zpřesnění. Každý z alternativních neklasických logických systémů přináší zpřesnění termínů užívaných v přirozeném jazyce a jazyce vědy z poněkud odlišného hlediska.

Klasická logika (výroková a predikátová) je ovšem nejlépe prozkoumaným formálním systémem. Její předností je to, že disponuje velmi jednoduchou a přesnou interpretací (pravdivostní tabulky ve výrokové logice), která z ní činí snadno ovladatelný operativní nástroj, což bývá rozhodujícím momentem pro volbu logického systému. To je ostatně patrné i z toho, že klasický výrokový a predikátový počet je samozřejmou součástí všech základních kursů logiky.

Konfrontace formálních logických systémů trvá již více než sedmdesát let. Stále zřetelněji se ale ukazuje, že nejde o konfrontaci či konkurenci v pravém slova smyslu, že jde spíše o hledání a studium alternativních pohledů. Představa, že různé systémy jsou si navzájem cizí, nebo si dokonce odporují, se dnes jeví jako příliš rigorózní. Lze totiž ukázat, že např. klasické výrokové spojky jsou v alternativních neklasických systémech definovatelné, a že tedy klasická logika je v neklasických v jistém smyslu obsažena.

5.7 Princip tolerance

Na závěr je ale třeba upozornit na to, že vztah obsažení se netýká jen obsažení klasické dvouhodnotové logiky v neklasických logikách, ale že i neklasické logiky lze chápat jako obsažené v klasické logice. V publikaci [45] jsou ukázány vztahy vzájemného obsažení klasické logiky a neklasických logických systémů. To nás vede k tomu, že neklasické logiky chápeme spíše ne jako konkurentní systémy, ale jako rozšíření klasické logiky o další vyjadřovací prostředky, jejichž studium je pro rozvoj logiky nejen zajímavé, ale i nezbytné.

Konstatování, že neklasické logiky jsou v jistém smyslu v klasické logice obsaženy, si ovšem vyžaduje vysvětlení. Říkáme-li např., že dva systémy obsahují tutéž formuli, není to zcela přesné, protože termíny v ní obsažené jsou v různých systémech chápány různě. Měli bychom spíše říkat, že dvě formule φ, ψ patřící do dvou různých systémů jsou *analogické*, když formule φ jednoho systému vznikne z formule ψ druhého systému nahrazením všech termínů odpovídajícími termíny prvního systému. Takový pojem analogie formulí dvou různých logických systémů nám umožní precizovat pojem obsažení jednoho kalkulu v jiném. Vidíme např., že intuicionistický výrokový kalkul je obsažen v klasickém dvouhodnotovém výrokovém počtu, ale ne naopak. Přesto ale můžeme, ovšem v jiném smyslu, mluvit o obsažení klasické logiky v intuicionistické, uvědomíme-li si, že každá formule platná v klasické logice se stane platnou formulí intuicionistické logiky, jestliže ji převedeme na ekvivalentní (z hlediska klasické logiky) tím, že ji dvakrát negujeme. Tak např. formule $\neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$ je platnou formulí v obou systémech. To však neplatí pro formuli $\varphi \vee \neg\varphi$. To je výsledek Kurta Gödela z počátku třicátých let.[13]

[13]Kurt Gödel: Zur intuitionistischen Aritmetik und Zahlentheorie. Ergeb. Math. Koll. 4, 1931-2, Wien.

Kapitola 6

Logika, znalosti, usuzování

6.1 Nemonotónní usuzování

Znalosti, které se týkají vnějšího světa se často mění. Postihnout dynamiku takových změn znamená mj., že musíme být připraveni na to, že bude třeba měnit i důsledky dříve odvozené. Usuzování, které provádíme za takové situace se někdy nazývá nemonotónní, neboť již dříve odvozené důsledky mohou být zpochybněny ve světle nově příchozí informace. Nemonotónním usuzováním se tedy obvykle rozumí usuzování při měnících se znalostech. Kdy jsme nuceni usuzovat nemonotónně? Takových situací, kdy musíme revidovat svoje dosavadní znalosti a úsudky, je dost. Nejvíc v běžném životě. V kontextu informatiky je dobrým příkladem jazyk Prolog. V Prologu, přidání byť i jediné klauzule do programu může způsobit, že cílová klauzule, která byla z programu odvoditelná, už odvoditelná nebude. Kdo měl co dělat s databázovými systémy, zná dobře problémy, které přináší předpoklad uzavřenosti světa při zodpovídání dotazů. V běžném životě, ale i v umělé inteligenci, se často setkáváme s "děrami ve znalostech", tj. s neúplnou informací o popisovaném světě nebo dokonce o světě měnícím se v čase. Tyto situace logika postihuje jen s obtížemi a ony si přirozeně vynucují, že naše usuzování je nemonotónní. Jejich neformální výklad je obsahem této kapitoly.

6.2 Neúplné informace

Mluvíme-li o neúplných znalostech, pak tím nejspíš chceme říci, že jsou nedostačující k tomu, abychom na jejich základě mohli dělat přesné logické závěry. Z tohoto hlediska úplná znalost je něco perfektního, definitivního či konečného. Naproti tomu neúplné znalosti jsou něco nedokonalého, něco dosud nehotového, neukončeného. Není ani třeba příliš sofistikované úvahy k tomu, abychom si položili otázku: Jak rozpoznáme, že naše znalosti jsou neúplné? Jedno z možných řešení je v odpovědi:

Všechny naše znalosti jsou neúplné!

Ale to není právě konstruktivní postoj. Poohlédněme se proto nejprve, jak se s problémem vypořádávají jinde.

6.2.1 Databáze

Kdo se někdy zajímal o databáze, ví, že k tomu, aby mohl odvozovat z faktů uložených v databázi, potřebuje nejen pravidla logického odvozování, ale také nějaké další předpoklady o světě, který je databázovým systémem popisován. Snad nejvýznamnějším takovým globálním předpokladem je *předpoklad uzavřenosti světa*, který (velmi zhruba) říká, že pravdivé je přesně to, co je obsaženo v databázi. Ale ještě jiné předpoklady jsou nezbytné:

- Jednoznačnost jmen objektů (*unique names assumption*). Podle tohoto předpokladu různá jména pojmenovávají různé objekty.
- Všechny objekty jsou pojmenovány, to je předpoklad uzavřenosti třídy objektů (*domain closure assumption*). To znamená, že není bezejmenných objektů.

A konečně už zmíněný

- Předpoklad uzavřenosti světa (*closed world assumption*).

Uvažujme jednoduchou databázi, která obsahuje informace o učitelích katedry a předmětech, které vyučují:

učí(pavel,lisp)

učí(pavel,pascal)

učí(petr,prolog)

...

Objekty a relace jsou v databázových systémech obvykle chápány jako základní (angl. *ground*) atomy a odpověď *pavel* na dotaz *Kdo učí lisp nebo pascal?* se chápe jako závěr, vyplývající z toho, že databáze obsahuje údaje, které mohou být chápány jako teorémy, tj. platné formule, např.:

učí(pavel,lisp) $\vee$ učí(pavel,pascal).

V případě naší učitelské databáze umožňují výše uvedené předpoklady popsat databázi formulemi:

pavel $\neq$ *petr, pavel* $\neq$ *lisp, petr* $\neq$ *prolog, lisp* $\neq$ *prolog,* ...
$(\forall x)(x = \text{pavel} \vee x = \text{petr} \vee x = \text{lisp} \vee x = \text{prolog} \ldots$
$(\forall x)(\forall y)(\text{učí}(x, y) \Rightarrow (x = \text{pavel} \wedge y = \text{lisp}) \vee (x = \text{petr} \wedge y = \text{prolog}) \vee \ldots)$

a závěry, které jsou podporované databází nyní, již budou vyplývat z teorémů. Naznačená logická interpretace databázového systému však není monotónní v tom smyslu, že prosté přidání nové informace (expanze) nemá za následek pouhé přidání dalších formulí, ale znamená vlastně nahrazení starých formulí novými. To, konec konců, není překvapující. Změny obsahů databáze vedou k nemonotónnosti důsledků, zatímco logické odvozování zůstává monotónní. Nicméně to naznačuje cesty, jak mohou být logickému odvozování vtisknuty rysy nemonotónního usuzování, např. dodáním další podmínky analogické předpokladu uzavřenosti světa. To nás povede mj. k *preferenčním logikám* a k omezením (*circumscription*).

6.2.2 Aktualizace znalostí a odvození

Aktualizace znalostí, které jsou chápány jako odůvodnění, je asi nejdůležitějším příkladem nemonotónního usuzování. Protože má velmi těsný vztah k logickému programování, věnujeme jí trochu víc místa. Definujeme pojem závislosti (někdy se používá též termínů justifikace, zdůvodnění, či ospravedlnění) elementárních položek znalostí a hledáme podmínky pro nalezení základní (*grounded*) interpretace dané konečné množiny závislostí.

Vyhneme se tomu, abychom pro systémy aktualizace znalostí a inferencí používali označení TMS (*Truth Maintenance Systems*)[1], protože nevystihuje dostatečně přesně náš problém. Systémem aktualizace znalostí a inferencí budeme rozumět program, který zpracovává (konečnou) množinu výroků a znalostí (pravidel), které určují závislosti mezi položkami báze znalostí. Závislost říká, že položku báze znalostí (v dalším budeme mít pro jednoduchost na mysli výroky) je možno akceptovat, když jiné položky báze jsou akceptovatelné a když popř. jiné akceptovatelné nejsou. To vede k následující definici:

Definice 6.2.1 Závislost *je libovolná klauzule*[2] *tvaru*

$$c \Leftarrow \alpha \wedge \beta,$$

[1]Viz např. Doyle, J. 1979, Reinfrank, M. 1989.

[2]Čtenář se snadno přesvědčí, že je oprávněné formuli tvaru $c \Leftarrow \alpha \wedge \beta$ nazývat klauzulí, protože může být převedena na formuli v klauzulárním tvaru jak byla definována v odst. 3.4.

kde c je atom, α je konjunkce atomů a β je konjunkce negovaných atomů.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že atomy jsou výrokové konstanty.

Definice 6.2.2 Bází znalostí *budeme rozumět libovolnou konečnou množinu závislostí.*

Protože závislost je definována tak, že hlava klauzule (atom c) je výraz bez negace, lze bázi znalostí reprezentovat sítí, přesněji grafem se dvěma druhy uzlů (výroky) a se dvěma druhy spojení, jeden pro pozitivní literály, druhý pro negativní literály. Z kterékoli grafové reprezentace báze znalostí je zřejmé, co znamená, že báze znalostí obsahuje cyklus.

Ve shodě s tím, že předpokládáme, že atomy jsou výrokové konstanty, je následující definice motivována grafovou reprezentací a je opět ve shodě s výrokovou logikou.

Definice 6.2.3 *Závislost $c \Leftarrow \alpha \wedge \beta$ podporuje uzel c v modelu M, jestliže formule $\alpha \wedge \beta$ je pravdivá v M.*

Pojem modelu a pravdivosti je beze změny převzat z výrokové logiky.

Definice 6.2.4 *Nechť Z je báze znalostí. Model M množiny závislostí Z nazveme* základní *(*angl. *grounded,* česky také *setříděný), když $M = \{c_1, \ldots, c_n\}$, kde pro každý atom c_i existuje aspoň jedna závislost s hlavou c_i, tj. $c_i \Leftarrow \alpha \wedge \beta$, která podporuje c_i a $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \{c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}\}$, kde a_j $(j = 1, \ldots, k)$ jsou všechny atomy vyskytující se v α.*

Jinými slovy, to, že model je základní znamená, že zdůvodnění jsou prováděna acyklicky. Srovnej Goodwin 1987. To je přirozený požadavek na to, jak mají být prováděny důkazy. Ve znalostních systémech první generace to bylo řešeno požadavkem acykličnosti každé množiny znalostí, ale to je příliš značné omezení. Pro znalosti je typické, že cykly obsahují, ty však nesmějí být v důkazech.

Připomeňme, že v úvahách o znalostech a důvodech je důležitý směr závislostí a že tudíž dvě závislosti, které jsou ekvivalentní z hlediska klasické logiky, mohou vést k různým závěrům. O tom, že tomu tak je, a že to není nic překvapujícího, nás přesvědčí jednoduchý příklad.

Příklad: Báze $Z_1 = \{a \Leftarrow \neg b\}$ a $Z_2 = \{b \Leftarrow \neg a\}$ jsou obě logicky ekvivalentní množině formulí $\{a \vee b\}$, mají však různé základní modely.

Poznámka 6.2.1 *Je zřejmé, že každý model M dané množiny závislostí může být zapisován ve tvaru $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$, kde $\{a_1, \ldots, a_n\}$ je množina atomů pravdivých v M.*

Pojem základního modelu ilustrujeme následujícím příkladem: Nechť

$$Z = \{a \Leftarrow \neg b, a \Leftarrow \neg c, b \Leftarrow a, c \Leftarrow \neg d, d \Leftarrow \neg c\}.$$

Snadno ověříme, že množina $M = \{a, b, d\}$ je modelem báze znalostí Z. Když a je v modelu, tak, podle třetí klauzule, i b musí být v modelu. Přitom ale b anebo c nesmí být v modelu, aby aspoň jedna závislost podporovala a. Požadavek acykličnosti důkazů dále říká, že z kandidátů c a d je třeba vybrat jen jednoho. Výběr c by ovšem nevedl k základnímu modelu. Model $M = \{a, b, d\}$ je základní, protože a je podporováno závislostí $a \Leftarrow \neg c$, b je podporováno závislostí $b \Leftarrow a$ a a je v modelu před b. Konečně d je podporováno závislostí $d \Leftarrow \neg c$.

Existuje ještě jiný základní model báze Z? Nikoli. To, že základní model, pokud existuje, je určen jednoznačně, vyplývá ze sémantických úvah, které provedli Gelfont a Lifschitz 1988 a Elkan 1990.

Definice 6.2.5 *Nechť I je interpretace atomů z množiny závislostí Z. Symbolem Z_I označíme množinu všech pozitivních atomů platných v interpretaci I.*

Jinými slovy, Z_I vznikne ze Z tak, že vynecháme takové závislosti s negativním antecedentem $\neg b$ (b je atom), pro něž $M \models b$ a ze zbývajících závislostí odstraníme všechny negativní antecedenty.

Definice 6.2.6 *Interpretace I se nazývá* stabilní model *báze znalostí Z, jestliže je to (ve smyslu inkluze) minimální model množiny závislostí Z_I, tj. když neexistuje taková interpretace I', že $I' \subset I$ a I' je modelem $Z_{I'}$.*

Definice základního a stabilního modelu jsou důležité, neboť bylo ukázáno (Elkan 1990), že pojem základního modelu pro nemonotonní odvozování v závislostních sítích přesně odpovídá pojmu stabilního modelu v závislostních sítích chápaných jako logické programy. Platí totiž

Tvrzení 6.2.1 *Každý model M báze znalostí Z je modelem báze Z_M. Navíc, každý základní model báze Z je základním modelem báze Z_M.*

Dále platí

Lemma 6.2.1 *Každý základní model je minimální (ve smyslu inkluze) a každý model báze znalostí, která neobsahuje negaci, je minimální, právě tehdy, když je to základní model.*

A konečně

Tvrzení 6.2.2 *Model báze znalostí je stabilní právě tehdy, když je základní.*

Navíc bylo ještě ukázáno, že aktualizace bází znalostí může být chápána jako speciální případ autoepistemické logiky. [3] O autoepistemických logikách bude ještě řeč v příštím odstavci.

6.3 Hierarchie dědění vlastností

Sémantické sítě a objektově orientované báze dat rovněž vyžadují nemonotónní usuzování. Objektově orientovaný systém je charakterizován následujícími vlastnostmi:

Dědičnost: Objektové typy jsou vztaženy k jiným typům tak, že podřazené typy dědí vlastnosti nadřazených typů.

Homogennost: Všechno jsou objekty, včetně typů. To umožňuje dynamické přidávání nových typů.

Datové abstrakce: Objekty jsou charakterizovány svým chováním, nikoli svou implementací .

Posílání zpráv: Interakce s objektem probíhá tak, že je mu zaslána zpráva a objekt sám rozhodne, jak odpoví.

Pro naše účely je nejdůležitější dědičnost. Hierarchie dědění vlastností (*inheritance hierarchies*), jsou zajímavým příkladem systému aktualizace znalostí s pravidly vyjadřujícími ISA-hierarchii pojmů v sémantických sítích.

Sítě s ISA-hierarchiemi (z angl. ”... *is a* ...“) jsou obvykle definovány jako acyklické sítě atomických výroků, které jsou spojeny pozitivními nebo negativními vazbami vyjadřujícími hierarchii dědění vlastností. Pozitivní vazby jsou tvaru ”*x je y*“. Negativní vazby jsou tvaru ”*x je ne-y*“ (označení: $x \not\Rightarrow y$). Intuitivně ”*x je normálně ne-y*“.

[3] Viz např. [47].

Cesta v síti pravidel je přirozeným způsobem definována jako (orientovaná) posloupnost souvisejících spojení, z nichž pouze poslední může být negativní. Cesty slouží k definování různých inferenčních strojů.

Uveďme aspoň dva příklady jednoduchých, ale nejednoznačných sítí:

Příklad 1: (Nixon diamond) $n \Rightarrow r, n \Rightarrow q, q \Rightarrow p, r \not\Rightarrow p$, chcete-li, můžete jména uzlů číst takto: n = Nixon, r = republikán, q = quaker, p = pacifista.

Příklad 2: $a \Rightarrow b, a \Rightarrow c, b \Rightarrow d, c \not\Rightarrow d, c \Rightarrow e, d \Rightarrow f, e \not\Rightarrow f$.

(Pro větší názornost si namalujte grafovou reprezentaci sítě.)

Ve většině metod šíření informace mezi uzly se preferuje specifičtější informace, takže např. v síti

$a \Rightarrow b, b \Rightarrow c, a \not\Rightarrow c,$

bude z a odvozen závěr *ne-c*.

Podobně jako aktualizace znalostí souvisí s logickými programy, tak usuzování v hierarchiích dědění vlastností úzce souvisí se stratifikovanými logickými programy. [4]

6.4 Teorie akcí

Teorie akcí, včetně plánování akcí, tvoří rozsáhlou a relativně samostatnou kapitolu nemonotónního usuzování. I formalismus bývá dosti odlišný, takže se zde pouze pro jakousi úplnost výkladu omezíme na upozornění, že problematika plánování akcí úzce souvisí s nemonotónním usuzováním, protože provedení akce může mít za následek změnu databáze. Plánování akcí lze v jistém smyslu chápat jako důkaz formule popisující cílový stav světa, z množiny formulí, které popisují jeho výchozí stav. Je zřejmé, že hodně záleží na povaze elementárních akcí. Pradědečkem těchto systémů byl známý STRIPS Richarda Fikese a Nilse Nilssona. Celá věc je navíc komplikována tím, že akce se dějí v čase a do hry vstupují *temporální logiky.* V souvislosti s temporálními logikami a nemonotónním usuzováním je třeba v současné době na prvním místě vyzdvihnout jméno Yoava Shoama, který v posledních letech snad nejvíc ovlivnil výzkum v této oblasti. [55], [56]

[4] Viz např. [50].

6.5 Formální teorie nemonotónní inference

Máme vyhovující teorii nemonotónní inference? Patrně ne, když takto klademe otázku. Přesněji, teorií máme možná až příliš mnoho, neustále vznikají další, často dost partikulární. Chybí jednotící hledisko. Zmíníme se proto jen o těch nejdůležitějších.

6.5.1 Logika defaultů

K nejznámějším a zároveň nejdiskutovanějším teoriím patří *logika defaultů* či *předdefinovaných pravidel* [52], v níž se k překonání trhlin ve znalostech používá tentativních odvozovacích pravidel tvaru

$$\alpha(x) : \beta(x)/\gamma(x),$$

kde $\alpha(x), \beta(x)$ a $\gamma(x)$ jsou formule prvního řádu s volnými proměnnými $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$. V angl. literatuře se pro ně někdy používá označení *precondition, test condition* a *consequent.*

Default a vhodná n-tice $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ základních termů dovolí odvodit formuli $\gamma(x)$ z formule $\alpha(x)$ za předpokladu, že $\neg\beta(a)$ není odvoditelné.

Tak např. dobře známý a ve znalostních systémech už hodně otřepaný default

pták(x) : létá(x) / létá(x)

dovolí odvodit *létá(pepe)* ze znalosti *pták(pepe)*. Když se ale zjistí, že pták *pepe* z nějakého důvodu nelétá, musí být defaultové pravidlo blokováno. Je ale zřejmé, že defaulty se mohou vzájemně blokovat. Náš default např s defaultem

nemá křídla(x) : ¬ létá(x) / ¬ létá(x)

Konflikty mezi defaulty charakterizuje pojem *extenze* teorie s defaulty. Definice je komplikovaná, proto, abychom se vyhnuli technickým podrobnostem, omezíme se na teorie s *normálními defaulty*, tj. s defaulty tvaru: $\alpha(x) : \beta(x)/\beta(x)$.

Definice 6.5.1 *E je* extenze teorie *T s (normálními) defaulty D, je-li to nejmenší deduktivně uzavřená množina obsauhjící T taková, že pro každý default $\alpha(x) : \beta(x)/\gamma(x)$ z D platí, že buď $E \vdash \neg\beta(x)$ nebo $\gamma(x) \in E$.*

Podrobně o teorii defaultů viz např. [52] a [5].

Příklad: Nechť $T = \emptyset, D = \{d_1, d_2\}$, kde

$d_1 = pták(x) : létá(x) \;/\; létá(x)$,

$d_2 = zraněný(x) : \neg\, létá(x) \;/ \neg\, létá(x)$.

Tato teorie má dvě rozšíření:

$E_1 = \{pták(pepe),\ zraněný(pepe),\ létá(pepe)\ \}$,

$E_2 = \{pták(pepe),\ zraněný(pepe),\ \neg\ létá(pepe)\ \}$.

Teorie s defaulty však nemusejí mít žádné rozšíření anebo mohou mít naopak mnoho rozšíření. V takovém případě by bylo vhodné vzít nejmenší, ale to nemusí existovat.

V dalším budeme předpokládat, že jak množina faktů, tak i teorie sestávají z formulí prvního řádu, a to z uzavřených formulí. Základní definice však mohou být vysloveny nezávisle na použitém jazyce i na operaci logického důsledku, která je předpokládána v pozadí defaultového systému. Takže předpokládáme, že je fixován jazyk, tj. je dána množina F dobře utvořených formulí spolu s deduktivní (monotonní) operací Cn definovanou na F, která je idempotentní, monotónní, a tranzitivní. Teorií s defaulty budeme rozumět množinu formulí (většinou množinu faktů vyjádřených základními instancemi v jazyce prvního řádu) spolu s množinou D defaultů.

Definice 6.5.2 *Default nazveme* uzavřený, *když neobsahuje žádnou volnou proměnnou (v obvyklém slova smyslu, jak jsme tento pojem zavedli v kapitole o predikátové logice); jindy je* otevřený. *Default nazveme* normální, *jestliže jeho ospravedlnění i závěr jsou logicky ekvivalentní formule (vzhledem k operaci důsledku Cn).*

Naším cílem je teď definovat pojem *extenze* teorie s defaulty, který bude analogií deduktivního uzávěru. Zde je ale situace poněkud komplikovanější, protože vlastně budeme rezignovat na striktní logickou korektnost. To, jak uvidíme, bude mj. znamenat, že v některých případech bude mít teorie s defaulty více než jedno rozšíření, v jiných případech naopak nebude mít rozšíření žádné.

Definice 6.5.3 *Množina formulí E se nazývá* extenze, rozšíření *teorie $T = [F, D]$ s fakty F a defaulty D, jestliže je to nejmenší deduktivně uzavřená množina formulí, která obsahuje F a pro každý default $d \in D$ $(d = (\alpha; \beta/\gamma))$ takový, že $Cn(E \cup \{\beta\}) \neq Fle$ (tj. β může být konzistenĕ přidáno* [5] *k výsledné množině E) $\gamma \in E$.*

Poznámka: Pokud náš jazyk obsahuje negaci a operace konsekvence je charakterizována standardní relací dokazatelnosti (tj. relací $\vdash$), pak podmínka, že extenze teorií s defaulty mají být uzavřené na všechny aplikovatelné defaulty, může být lépe vyjádřena tak, že pro každý default platí: $E \vdash \neg\beta$ or $\gamma \in E$.

[5] Termín "konsistentně přidáno" zde zřejmě znamená, že konzistence je tu chápána vůči operaci logického důsledku, která je skryta v pozadí.

Definice 6.5.4 *Nechť $T = [F, D]$ je teorie s defaulty, F je množina faktů, D je množina defaultů. Nechť $\Gamma(X)$ je nejmenší množina taková, že:*

- $F \subseteq \Gamma(X)$
- $Cn(\Gamma(X)) = \Gamma(X)$
- *Jestliže* $(\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_n/\gamma) \in D$ *a* $\alpha \in \Gamma(X)$ *and* $\neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_n \notin \Gamma(X)$, *potom* $\gamma \in \Gamma(X)$.

Řekneme, že množina E formulí je extenzí *teorie T s defaulty D, když $\Gamma(E) = E$, tj. když E je pevný bod zobrazení Γ.*

Tvrzení 6.5.1 *Nechť $T = [F, D]$ je teorie s defaulty D a E je množina uzavřených formulí prvního řádu. Definujeme*

$E_0 = F$

Pro $i \geq 0$:
$E_{i+1} = Cn(E_i) \cup \{\gamma : (\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_n/\gamma) \in D, \alpha \in E,\ a\ \neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_n \notin E\}$.

Potom E je extenze teorie $T = [F, D]$ s defaulty právě když $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$.

Jinými slovy, E je množina (uzavřených) formulí obsahující F, která je uzavřená jak na logické důsledky, tak na defaultová pravidla. Na tomto místě je třeba upozornit na to, že i když E se vyskytuje v definici E_i, nejde o definici kruhem! Je to definice korektní.

Důkaz: Snadno ověříme všechny podmínky z předcházející definice extenze (třetí podmínka je důsledkem minimality operátoru Γ).
Implikace zleva doprava: Nechť E je extenze. Indukcí můžeme dokázar, že pro každé $i \geq 0 : E_i \subseteq E$ a tudíž $\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \subseteq E$ a v souladu s tím, že $E = \Gamma(E)$ dostáváme $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \subseteq E$.
Implikace zprava doleva: Předpokládejme, že $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \subseteq E$. Analogicky předchozí části důkazu lze ukázat, že pro všechna $i \geq 0 : E_i \subseteq \Gamma(E)$, a tak $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \subseteq E \subseteq \Gamma(E)$.

Tvrzení 6.5.2 *(Minimalita extenze) Nechť E_1, E_2 jsou dvě různé extenze teorie $T = [F, D]$ s defaulty. Jestliže $E_1 \subseteq E_2$, pak $E_1 = E_2$.*

Důkaz: Podle předchozího teorému máme $E_1 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E'_i$, $E_2 = \bigcup_{i=0}^{\infty} E''_i$. Jelikož $E_1 \subseteq E_2$, stačí ukázat, že také $E_2 \subseteq E_1$. To lze prokázat indukcí podle konstrukce extenze.

Snadno ověříme, že $E''_0 \subseteq E'_0$, protože obě se rovnají F. Předpokládejme navíc, že $E''_i \subseteq E'_i$ a uvažujme formuli $\gamma \in E''_{i+1}$. Chceme dokázat, že také $\gamma \in E'_{i+1}$. Je jistě pravda, že když $\gamma \in Cn(E''_{i+1})$, tak $E''_i \subseteq E'_i$ a $\gamma \in Cn(E'_i) \subseteq E'_{i+1}$; jinak existuje takový default $d = (\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_n/\gamma)$, že $\alpha \in E''_i$ a $\neg\beta_i, \ldots, \neg\beta_n \notin E''$. Jelikož $E''_i \subseteq E'_i$ a $E' \subseteq E''$, máme $\alpha \in E'_i$ a $\neg\beta_i, \ldots, \neg\beta_n \notin E$. Takže $\gamma \in E_{i+1'}$.

Zřejmě, teorie s defaulty má sporné rozšíření, právě když T je sporná.

Tvrzení 6.5.3 *Nechť E je extenze teorie $T = [F, D]$ s defaulty. Nechť $X \subseteq E$. Pak E je extenze teorie s fakty $F \cup X$ a defaulty D.*

Důkaz: (Indukcí).

Tato věta říká, že Reiterův koncept extenze teorie s defaulty splňuje podmínku opatrné monotónnosti.

6.5.2 Příklady extenzí teorií s defaulty

Začněme s příklady extenzí různých teorií s defaulty. Většina je

E1. **Teorie se dvěmi extenzemi**:
Nechť T je teorie s fakty
$F = \{b \Rightarrow \neg a \ \wedge \neg c\}$ a defaulty
$D = \{(; a/a), (; b/b), (; c/c)\}$. Potom tato teorie má dvě extenze:

$E_1 = Cn(F \cup \{a, c\})$
$E_2 = Cn(F \cup \{b\})$.

E2. **Teorie s jedinou extenzí**:
$F = \emptyset$,
$D = \{(; a/\neg b), (; b/\neg c), (; c/d)\}$. Tato teorie má právě jednu extenzi.

$E = Cn(\{\neg b, d\})$.

E3. **Teorie se třemi různými extenzemi**:
$F = \{b, c \Rightarrow d \vee a, a \ \wedge c \Rightarrow \neg e\}$.
$D = \{(; a/a), (; c/c), (d \vee a; e/e), (c \wedge e; \neg a, d \vee a \ /f\}$. Tato teorie má tyto tři různé extenze:

$E_1 = Cn(F \cup \{a, c\})$
$E_2 = Cn(F \cup \{a, e\})$
$E_3 = Cn(F \cup \{c, e, f\})$.

E4. **Teorie se dvěmi extenzemi, které jsou založeny na různých ontologiích**:
$F = \emptyset$,
$D = \{(a; (\exists x)P(x)/(\exists x)P(x)), (; a/a), (; \neg a\ /\neg a)\}$.

$E_1 = Cn(\{\neg a\})$
$E_2 = Cn(\{a, (\exists x)P(x)\})$.

E5. **Teorie, která nemá žádnou extenzi**:
$F = \{a\}$,
$D = \{(a; b \wedge c/c), (c; \neg b/\neg b)\}$.

E6. **Jiný příklad teorie bez extenze**:
$F = \emptyset$,
$D = \{(; a/\neg a)\}$.

Je ovšem pravdou, že toto je poněkud "patologický" default, který paradoxně spojuje pozitivní ospravedlění s negativním závěrem.

Následující příklady ukáží, jak přidání nového faktu k daným faktům může dokonce ovlivnit i počet extenzí.

E7. Uvažujme množinu defaultů:
$D = \{(; a/a), (a \vee b; \neg a/\neg a)\}$
a dvě množiny faktů:
$F_1 = \emptyset$
$F_2 = \{a \vee b\}$.

Potom teorie $T_1 = [F_1, D]$ má právě *jednu* extenzi $E = Cn(\{a\})$, zatímco teorie $T_2 = [F_2, D]$ má *dvě* extenze $E' = Cn(F_1 \cup \{a\})$ a $E'' = Cn(F_2 \cup \{\neg a, b\})$.

6.5.3 Restrikce defaultů

Teorie s libovolnými defaulty jsou příliš složité a mají některé nežádoucí důsledky, které je obtížné popsat na obecné úrovni. Hlavním problémem neomezených defaultů je to, že taková pravidla mohou být aplikována dokonce i tehdy, když o závěru pravidla je známo, že je nepravdivý. Abychom se této obtíži vyhnuli, obvykle požadujeme, aby se podmínka pravdivosti závěru vyskytovala v ospravedlnění defaultového pravidla. To znamená, že pracujeme s tzv. *seminormálními* defaulty, tj. s defaulty tvaru

$$(\alpha; \beta \wedge \gamma/\gamma)$$

To je rozumné omezení, které nemá postatný vliv na vyjadřovací sílu logiky defaultů. Navíc Jürgen Dix [16] ukázal, že některé důležité vlastnosti jako kumulativnost a existence nemohou být splněny ani pro seminormální defaultová pravidla bez standardních premis, tj. pro pravidla tvaru

$$(true; \beta \wedge \gamma/\gamma)$$

Ano, název pro normální defaulty je zvolen velmi dobře, protože každý "vskutku normální" default má právě tento tvar, zatímco ostatní tvary pravidel jsou více či méně "patologické" jako např. ve výše uvedeném příkladu E5. Zkuste nalézt *opravdu přirozený* příklad rozumného defaultu, který není normální!

Teorie s normálními defaulty mají dobré vlastnosti, zejména mají zaručenou existenci extenzí, což vyjadřuje následující věta.

Tvrzení 6.5.4 *Každá (bezesporná) teorie, která obsahuje pouze uzavřené normální defaulty má aspoň jedno bezesporné rozšíření.*

Důkaz: Nechť $T = [F, D]$ je teorie s normálními defaulty. Když F je inkonzistentní, tak má inkonzistentní extenzi (viz důsledek teorému o minimalitě extenzí). Předpokládejme, že F je konzistentní. Požadovanou extenzi sestrojíme takto:
$E_0 = F$
Nechť pro každé $i \geq 0$ let F_i je maximální uzavřená množina formulí taková, že

1. $E_i \cup F_i$ je bezesporná a
2. když $\varphi \in F_i$, tak existuje default $d = (\alpha; \gamma/\gamma) \in D$, že $\varphi = \gamma$ a $\alpha \in E_i$.

Definujme $E_{i+1} = Cn(E_i) \cup F_i$ a $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$.

To, že E je extenze teorie T lze dokázat ověřením toho, že

$F_i = \{\gamma : (\alpha; \gamma/\gamma) \in D$ kde $\alpha \in E_i$ a $\neg\gamma \notin E\}$ a aplikací Teorému 1.

Abychom mohli srozumitelně vyslovit následující větu zavedeme nejprve pojem defaultů generujících extenzi E vzhledem k teorii $T = [F, D]$.

Definice 6.5.5 *Nechť $T = [F, D]$ je teorie s uzavřenými defaulty a E je její rozšíření. Definujeme množinu* generujících defaultů *pro E vzhledem k T následovně*

$$gd(E, [F, D]) = \{d \in D;\ \alpha \in E \ \textit{and}\ \neg\beta \notin E\}.$$

Nyní je zřejmé, že když E je extenze teorie $T = [F, D]$, tak potom E můžeme chápat jako deduktivní uzávěr množiny formulí, který obsahuje fakta F a všechny důsledky generujících defaultů, tj.

$$E = Cn(F \cup consq(E, T)).$$

Tvrzení 6.5.5 *(Semimonotónnost)*

Nechť $T = [F, D]$ je teorie s uzavřenými normálními defaulty. $D' \subseteq D$ a E' je extenze teorie $T' = [F, D']$. Potom T má takové rozšíření E, že

1. *$E' \subseteq E$ a*
2. *$gd(E', D') \subseteq gd(E, D)$.*

Důkaz: Definujme

$F_0 = F$
$F_{i+1} = Cn(F_i) \cup \{\gamma; (\alpha; \gamma/\gamma) \in D$, kde $\alpha \in F_i$ a $\neg\gamma \notin E\}$.

Ukážeme, že množina

$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ je extenzí teorie $T = [F, D]$ (podle Teorému 2).

Avšak teorém o semimonotónnosti neplatí pro libovolné defaulty. Zde je protipříklad: Nechť $T = [F, D]$ je taková teorie, že $F = \emptyset$ and $D = \{(; \beta/\gamma)\}$. T má jedinou extenzi $E = Cn(\{\gamma\})$. Když přidáme nový default $d' = (; \neg\beta/\neg\beta)$ k D dostaneme teorii $T' = [F, D']$, $D' = D \cup \{d'\}$ s jedinou extenzí $E' = Cn(\{\neg\beta\})$, ale $E \not\subseteq E'$.

Tvrzení 6.5.6 *(Ortogonalita extenzí) Jestliže teorie $T = [F, D]$ s uzavřenými normálními defaulty má dvě různé extenze E', E'' (tj. $E' \neq E''$), pak množina $E' \cup E''$ je sporná.*

Důkaz: Podle teorému 1 $E' = \bigcup_{i=0}^{\infty} E'_i$ a $E'' = \bigcup_{i=0}^{\infty} E''_i$ kde
$E'_0 = F$ a pro $i \geq 0$ $E'_{i+1} = Cn(E'_i) \cup \{\gamma; (\alpha; \gamma/\gamma) \in D$, kde $\alpha \in E'_i$ a $\neg\gamma \notin E'\}$.
Analogicky pro E'': Jelikož E' a E'' jsou různé, tj. $E' \neq E''$, a $E'_0 = E''_0$ tak musí existovat takové $i \geq 0$, že $E'_i = E''_i$ a $E'_{i+1} \neq E''_{i+1}$. To znamená, že existuje takový default d, že $\alpha \in E'_i = E''_i$, pro který $\neg\gamma \notin E'$ a zároveň $\gamma \in E'_{i+1}$, ale $\gamma \notin E''_{i+1}$. Avšak když $\alpha \in E'_i$ a $\gamma \notin E''_{i+1}$, tak $\neg\gamma \in E''$. Tudíž $\gamma \in E'$ a $\neg\gamma \in E''$. To znamená, že $E' \cup E''$ je inkonsistentní.

Jestliže $T = [F, D]$ je taková teorie s uzavřenými normálními defaulty, že $E \cup consq(D)$ je bezesporná, tak T má právě jednu bezespornou extenzi.

Důkaz: Předpokládejme opak, že totiž T má dvě různé extenze E_1, E_2. Potom
$E_1 = Cn(F \cup consq(gd(E_1, F)))$
$E_2 = Cn(F \cup consq(gd(E_2, F)))$

Nyní
$E_1 \subseteq Cn(F \cup consq(D))$
$E_2 \subseteq Cn(F \cup consq(D))$

Avšak podle předpokladu je $F \cup consq(D)$ konzistentní, což je ve sporu s tím, že sjednocení $E_1 \cup E_2$ obou extenzí je konzistentní.

A nakonec ještě ukážeme, že pro danou množinu formulí počet extenzí teorie s defaulty neroste nutně s rostoucím počtem defaultů. To můžeme vyslovit jako teorém.

Tvrzení 6.5.7 *Nechť $T = [F, D]$ a $D' \subseteq D$ a nechť E_1' a E_2' jsou dvě různé extenze teorie $T = [F, D']$. Potom T má dvě různé extenze E_1, E_2 takové, že $E_1' \subseteq E_1$ a $E_2' \subseteq E_2$.*

Důkaz: Vzhledem k semimonotónnosti existují dvě různé extenze E_1 a E_2 takové, že $E_1' \subseteq E_1$ a $E_2' \subseteq E_2$. Předpokládejme, že $E_1 = E_2$. Potom $E_1' \cup E_2' \subseteq E_1$, ale $E_1' \cup E_2'$ je sporná. To znamená, že E_1 musí být také sporná a tudíž i T (tj. F) musí být sporná.

6.5.4 Problémy usuzování v teoriích s defaulty

Stále ještě zůstávají otevřené problemy usuzování v teoriích s defaulty, které přicházejí z mimologických zdrojů. K těm nejdůležitějším jistě patří nemožnost rozlišit mezi standardními a defaultovými závěry. Navíc není zřejmé jak převádět (formalizovat) defaulty na odpovídající tvar, tj. na normální, seminormální či obecné defaulty. Z výpočtového hlediska je významné, že v rámci vyjadřovacího aparátu teorií prvního řádu jsou často obsáhlejší teorie nezpracovatelné ([52]); to se týká i seminormálních teorií. (Etherington 1988, Selman and Kautz 1988).

To je dobrý důvod ke zkoumání modifikací pojmu extenze teorie s defaulty, cž provedl např. Witold Łukaszewicz [40], který zkoumal modifikaci konceptu extenze Reiterovy logiky, která zaručuje existenci extenze spolu s vlastností semimonotónnosti. Łukaszewiczova modifikace je založena na odlišném řešení konfliktu současně aplikovatelných pravidel. V Reiterově přístupu je snaha aplikovat všechna aplikovatelná pravidla, což někdy není možné. Avšak Poole opět nalezl příklady, kdy ani Łukaszewiczova modifikace nepomůže. Navíc, Brewkova zkušenost s [7] kumulativní logikou defaultů ukazuje, že stále ještě existují otevřené problémy. Zdá se, že patrně nemohou být řešeny uniformní cestou. Správná cesta patrně povede k jakési rovnováze mezi formálními omezeními pro defaultová pravidla a žádoucí volností vyjadřovací síly jazyka.

Následující Makinsonův příklad dobře ilustruje problém:

$d_1 = (true; p/p)$ $d_2 = (p \vee q; \neg p/\neg p)$.

Opět je to jistý druh "patologie".

6.5.5 Omezení (circumscription)

Jedná se o techniku minimalizace extenze predikátu. To lze v logice prvního řádu modelovat tak, že pro definici relace vyplývání jsou do úvahy vzaty nikoli všechny, ale jen některé modely (v jistém smyslu minimální).

Definice 6.5.6 *Nechť* M_1 *a* M_2 *jsou modely formule* α. P *je predikátový symbol. Mezi modely formule* α *definujeme relaci uspořádání takto:* $M_1 \leq_P M_2$, *jestliže*

- *nosiče modelů* M_1 *a* M_2 *jsou shodné,*
- *všechny predikátové symboly, kromě* P, *vyskytující se ve formuli* α, *mají v obou modelech stejnou extenzi,*
- *extenze predikátu* P *v* M_1 *je částí extenze* P *v* M_2.

Řekneme, že model M *je* minimální vzhledem k relaci $\leq_P$), *jestliže pro každý model* M' *takový, že* $M' \leq_P M$ *je* $M' = M$.

Na základě pojmu minimálního modelu pak můžeme modifikovat pojem vyplývání následovně:

Definice 6.5.7 *Formule* α m-vyplývá *z formule* β *(vhledem k* P*), jestliže* α *je pravdivá ve všech modelech formule* β *minimálních vzhledem k relaci* $\leq_P$.

Chceme-li např. modelovat situaci s atypickou (řídce se vyskytující vlastností) jako je u nás vlastnost *mít zrzavé vlasy*, budeme se snažit odvodit z premis

$$Marie \neq Jan,\ zrzavá(Marie)$$

něco o Janovi a jeho vlasech. Zajisté existují modely, v nichž Jan má zrzavé vlasy. My ovšem hledáme jen takové modely, které jsou minimální vůči predikátu *zrzavý*, tj. takové, v nichž tento predikát má nejmenší extenzi. Takže potom formule $\neg$ *zrzavý(Jan)* m-vyplývá z výše uvedených dvou premis.

Otázkou ovšem zůstává, jak m-vyplývání charakterizovat syntakticky? Jednou z možností, jak eliminovat nezajímavé modely, je specifickým způsobem omezit výchozí premisy. Nemonotónní důsledky z dané formule se pak dostanou jako monotónní důsledky z této formule a ještě něčeho. Cílem je vybrat to "něco" (omezení, angl. *circumscription*) tak, abychom dostali právě minimální modely výchozí formule s omezením extenze daného predikátu.

To se obvykle řeší tak [9], že omezením predikátu P ve formuli α je schéma (formule druhého řádu) tvaru

$$\alpha(\Phi) \wedge (((\forall x)\Phi(x) \Rightarrow P(x)) \Rightarrow ((\forall x)P(x) \Rightarrow \Phi(x))),$$

kde $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ a symbolem $\alpha(\Phi)$ jsme označili výsledek nahrazení všech výskytů predikátu P ve formuli α parametrem Φ.

Tím se ovšem dostáváme za hranice teorií prvního řádu. Při odvozování se proto použijí všechny instance schematu. Predikátový parametr Φ bude nahrazen jiným n-argumentovým predikátovým symbolem.

6.5.6 Autoepistemická logika

V autoepistemických logikách se rozšíří jazyk o další modální operátor (obvykle $\Box$), který vyjadřuje přesvědčení o platnosti formule φ. Původní formulace autoepistemických logik pochází od R. C. Moorea, [47]. V posledních letech jsou autoepistemické logiky intenzívně studovány.

Definice 6.5.8 Stabilní rozšíření *autoepistemické teorie T definujeme jako množinu formulí*

$$S(T) = Cn(T \cup \{\Box\varphi; \varphi \in S(T)\} \cup \{\neg\Box\varphi; \varphi \notin S(T)\}),$$

kde Cn je operace logického důsledku.

Stabilní rozšíření mají reflektovat možné modely přesvědčení ideálního racionálního agens, které jsou uzavřené na pozitivní i negativní introspekci. Podobně jako v Reiterově logice defaultů, existují autoepistemické teorie, které nemají stabilní rozšíření, jiné jich mají mnoho, dokonce i nekonečně mnoho.

Autoepistemické logiky byly úspěšně využity např. při budování sémantiky logických programů a systémů aktualizace znalostí. Charakterizace je přirozená a přímá, pouze se logická negace nahradí autoepistemickou negací, neboli, literál $\neg\varphi$ se nahradí literálem $\neg\Box\varphi$. Předností autoepistemických logik je to, že je to vlastně jediný systém, v němž je je možno rozlišit mezi přesvědčením v platnost propozice a absencí přesvědčení v platnost její negace. Autoepistemická logika tak činí, a to ve prospěch absence informace.

Velmi zajímou roli v autoepistemických má sémantika možných světů Carl Lewise pro modální systém S5. Moore ukázal. že autoepistemická teorie T je množina formulí pravdivých v každém světě nějaké úplné struktury pro S5 právě když je to stabilní autoepistemická teorie.

Definice 6.5.9 Modelem *autoepistemické teorie zde rozumíme dvojici* $\mathcal{S} = [S, val]$, *kde* S *je úplná struktura pro systém S5 a* $val : VAR \mapsto \{0,1\}$ *je ohodnocení neboli valuace (tj. zobrazení z výrokových proměnných do pravdivostních hodnot), které určuje, co je pravdivé v aktuálním světě.*

Příklady: Nechť $A = \{\neg\Box p \Rightarrow q\}$ je množina počátečních přesvědčení.

1. Předpokládejme, že T obsahuje výrok q, ale neobsahuje p. V takovém případě úplná struktura pro S5 popisující teorii T je $S = \{\{p,q\},\{\neg p,q\}\}$. Formule $\neg\Box p \Rightarrow q$ je pravdivá pouze ve dvou případech:
$$val_0 = \{p,q\}, \quad val_1 = \{\neg p, q\}.$$
   Každé z obou ohodnocení odpovídá nějakému možnému světu ve struktuře pro $\mathcal{S}$ v teorii T se stabilní expanzí výchozích přesvědčení A.

2. Předpokládejme teď, že teorie T obsahuje p, ale neobsahuje q. Potom $S = \{\{p,q\},\{p,\neg q\}\}$. Druhá valuace, tj. $val_1 = \{\neg p, q\}$ je jistě autoepistemickou interpretací teorie T v níž A je pravda. Avšak protože val_1 neodpovídá žádnému možnému světu ve struktuře $\mathcal{S}$, tak T nemůže být stabilním rozšíření množiny A.

3. Předpokládejme nakonec, že teorie T neobsahuje ani p ani q. Potom $S = \{\{p,q\}\}$. Stejný argument (se stejnou valuací valuací) nás vede k analogickému závěru jako v předchozím příkladu.

Kapitola 7

Filozofická logika a analytická filozofie

7.1 Logika a filozofie

V tradici evropského myšlení byla vždy logika chápána jako součást filozofie, i když k jejímu rozvoji často docházelo spíše v jiných disciplínách. Z části jsme nahlédli, že tomu tak bylo hlavně na půdě matematiky. Ale i na půdě filozofie samotné se role logiky a její chápání v průběhu časů měnily.

Ve 20. století se logika (někdy nazývaná *filozofická logika*) stávává významnou součástí mohutného filozofického proudu - *analytické filozofie*. Co je filozofická logika a co je analytická filozofie? Pro nás je analytická filozofie spojena především s tradicí Vídeňského kroužku a se jmény význačných filozofů a logiků jako Rudolf Carnap, Gottlob Frege, Montague, Willard van Orman Quine, Bertrand Arthur William Russell, Ludwig Wittgenstein, Alfred North Whitehead, abychom jmenovali aspoň některá jména patřící k nejvýznamnějším. To je ovšem téma na samostatné skriptum. V současné české filozofické a logické literatuře je vztahu logiky a filozofie bohužel věnováno jen málo pozornosti. Čtenáři je možno nyní doporučit publikaci Jaroslava Peregrina: Logika ve filozofii, filozofie v logice. (Historický úvod do analytické filozofie). Herrmann a synové, Praha 1992.

Analytická filozofie je hledáním řádu v našem způsobu vyjadřování (tedy v jazyce) i v našem složitém světě. Je možné ji charakterizovat jako logickou analýzu jazyka, neboť svět můžeme uchopit vždy právě jen prostřednictvím jazyka. Logická analýza jazyka ale není jednoznačně vymezenou ani jednoznačně vymezitelnou disciplínou. Často je chápána dost odlišně. Jednak v russelovské, carnapovské a tarskiánské tradici, jednak v tradici wittgensteinovské. V té první jde spíše o přesvědčení, že filozofie je vlastně jen aplikací logiky a ani jiné ambice mít nemůže. V té druhé nejde o nalézání řádu věcí

Jestliže jsme na začátku řekli, že logik si klade otázku, jak uchopit řád věcí, jak mu porozumět, co je to pravda, pak musíme skončit konstatováním, že každý, kdo chce porozumět, by měl prostudovat nebo alespoň přečíst jedno z nejzávažnějších filozofických děl tohoto století Krizi evropských věd a transcendentální fenomenologii Edmunda Husserla.[1] Je to patrně nezbytný předpoklad k pochopení významu logiky pro porozumění řádu našeho komplikovaného světa. Pak možná pochopíme, že pravda není jen shoda výroku se skutečností, ale že záleží na tom kdo, komu, kdy, kde a co říká. Není to jen vlastnost výpovědi samé, je to mnohorozměrný vztah. To si ostatně dobře uvědomoval už před skoro šesti sty lety rektor Karlovy univerzity, realista (ve středověkém smyslu tohoto slova) mistr Jan z Husi.

[1]Academia, Praha 1972.

Kapitola 8

Stručný přehled významných logiků

Aristotelés ze Stageiry (384–322 př. n. l) Nejvýznamnější žák Platonův, zakladatel systematické filozofie a formální logiky, kterou chápal jako logiku pojmů (sylogistika, teorie kategorického sylogismu) na rodíl od stoické logiky výroků. Hlavní spisy o logické problematice: *Organon I-VI: Kategorie, O vyjadřování, První analytiky, Druhé analytiky, Topiky, O sofistických důkazech.*

Babbage, Charles (1792–1871) Anglický matematik, profesor na univerzitě v Cambridge. Vynalezl princip analytického stroje, který lze považovat za předchůdce elektronického počítače v dnešním slova smyslu. Jeho stroj měl být mechanický, avšak programovatelný (děrnými štítky). První programátorkou byla Ada Augusta Lovelance, dcera lorda Byrona. Jakousi menší verzi sestrojil koncem 19. století Babbegův syn. Hlavní spis: *On the Economy of Machinery and Manufacturers* (1984)

Bolzano, Bernard Placidus Johan Nepomuk (1781–1848) Pražský filozof, matematik a logik. Profesor filozofie a náboženství v Praze od r. 1805. Vypracoval teorii vědy založenou na logice, v níž předjímá Tarského pojem logického vyplývání. V roce 1820 zbaven profesury pro své racionalistické tendence v theologii. Hlavní díla: *Wissenschaftslehre* (Vědosloví) 1837 a *Paradoxien des Undendlichen* (Paradoxy nekonečna) 1851.

Boole, George (1815–1864) Anglický matematik, jeden ze zakladatelů moderní logiky (Booleova algebra). Zabýval se ovšem též počtem pravděpodobnosti a matematickou analýzou (calculus). V letech 1849-1864 profesor matematiky na Queen's College v Corku (Irsko). Hlavní díla: *Mathematical Analysis of Logic* (Matematická analýza logiky) 1847 a *Laws of Thought* (Zákony myšlení) 1854.

Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (1881–1966) Nizozemský matematik a logik, od r. 1912 profesor matematiky na univerzitě v Amsterdamu. Zakladatel intuicionismu v logice a filozofii. Hlavní díla: *Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik* 1924–

26, *Historical background, principles and methods of intuitionism* (Historický základ, principy a metody intuicionismu) 1952.

Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp (1845–1918) Zakladatel teorie množin, kde nejvýznamnější byl pojem kardinálního čísla. Doktorát získal v r. 1867 na univerzitě v Berlíně. Od r. 1869 profesorem na univerzitě v Halle až do penze v r. 1913.

Carnap, Rudolf (1891–1970) Nejprve docent na univerzitě ve Vídni, profesor filozofie v Praze a později (1936) v USA. Jedna z hlavních postav Vídeňského kroužku. Zabýval se především formální logikou a jejími aplikacemi v základních problémech epistemologie. Hlavní díla: *Logische Aufbau der Welt* (Logická výstavba světa). *Logische Syntax der Sprache* (Logická syntaxe jazyka). *Meaning and Necessity* (Význam a nutnost). *Testability and Meaning* (Testovatelnost a význam). Ko-editor čsp. The Journal of United Science (Erkenntnis).

De Morgan, Augustus (1806–1871) De Morgan byl profesorem matematiky na *Univesity College* v Londýně. Byl též zakladatelem Londýnské matematické společnosti. V roce 1838 zavedl termín *matematická indukce*. Známy jsou de Morganovy zákony výro kové logiky, které uvádějí duální spojky konjunkce a disjunkce do vztahu k negaci. Později se ukázalo, že analogické zákony lze formulovat i v predikátové logice, modálních a jiných logikách.

Eukleides z Alexandrie (asi 365–300 př. n.l.) Jeden z nejvýznamnějších matematiků starověku. Proslul axiomatizací geometrie v díle *Základy*.

Euler, Leonard (1707–1783) Švýcarský matematik, který působil v Petrohradě a v Berlíně. Eulerovy diagramy slouží k reprezentaci operací a relací na třídách (množinách). Zasloužil se též o geometrii, matematickou analýzu (kalkulus) a teorii čísel. Na pozvání Kateřiny I (manželka Petra Velikého) působil v Petrohradské akademmi věd. Od r. 1730 profesorem fyziky a od r. 1733 profesorem matematiky tamtéž. Hlavní díla: *Mechanica* (1736–37) a Dopisy německé princezně (3 díly) (1768–72).

Frege, Gottlob (1848–1925) Německý matematik a logik. Od r. 1874 docentem matematiky, od r. 1886 mimořádným a od 1896 řádným profesorem na univerzitě v Jeně. Ukázal, že logika může být chápána jako prostředek uchopení smyslu jazykových výrazů. Filozofii redukoval na logickou analýzu jazyka. Jeden ze zakladatelů analytické filozofie. Hlavní díla: *Begriffschrift* (Pojmové písmo) 1879, *Die Grundlagen der Aritmetik* (Základy aritmetiky) 1884, *Über Sinn und Bedeutung* (O smyslu a významu) 1892, *Logische Untersuchungen* (Logická zkoumání) 1918-23.

Gentzen, Gerhard (1909–1945) Německý matematik a logik. Studoval v Greifswaldu a později v Göttingen, kde se r. 1940 habilitoval. (Tehdy zde působili i D. Hilbert, H. Weyl a další význační matematikové.) Od r. 1943 na přírodovědecké fakultě německé Karlovy univerzity v Praze. Zemřel v r. 1945 v Praze. Jeho cílem bylo dokázat bezespornost matematické analýzy. Hlavní díla: *Untersuchungen über das logische Schließen*

(Zkoumání o logickém uzávěru) 1935 a *Die Wiederspruchtsfreiheit der reinen Zahlentheorie* 1936.

Gödel, Kurt (1906–1978) Rakouský matematik a snad nejvýznamnější logik tohoto století. Narodil se Brně. Svými výsledky ze 30tých let (věta o neúplnosti) prokázal omezenost programu formalizace, tj. nemožnost formalizovat důkaz bezespornosti logického systému uvnitř systému samého. Spolu s Bernaysem tvůrce jedné varianty axiomatické teorie množin. Dokázal bezespornost axiomu výběru a Cantorovy hypotézy kontinua. Od 1941 profesor matematiky na univerzitě v Princetonu (New Jersey).

Herbrand, Jean (1908–1931) Francouzský logik. V sedmnácti letech, tedy mimořádně brzy, vstoupil na *Ecole Normale Supérieur.* Tématem jeho doktorské disertace byla matematická logika, což v té době bylo překvapivé, neboť logika se ve Francii tehdy nepěstovala. Během své velmi krátké vědecké kariéry – zahynul při horolezeckém výstupu v Alpách – dosáhl významných výsledků. Hlavní výsledek, známý dnes jako Herbrandův teorém uvádí do souvislosti teorii kvantifikace (jistou formu predikátové logiky) a výrokovou logikou. V současné době Herbrandův teorém tvoří základ pro studium metod automatického dokazování teorémů.

Heyting, Arend (1898–1980) Holandský matematik a logik. Tvůrce formálního systému intuicionistické logiky. Hlavní díla: *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* (Formální pravidla intuicionistické logiky) 1930, *Logique et intuitionisme* (Logika a intuicionismus) 1952, *After thirty years* (Po třiceti letech) 1962.

Hilbert, David (1862–1943) Německý matematik, od r. 1895 profesorem matematiky na univerzitě v Göttingen. Významné výsledky v geometrii, matematické analýze, teorii čísel i algebře. V logice představitel programu formalizace. Hlavní díla: *Grundlagen der Geometrie* (Základy geometrie) 1899 a *Gesammelte Abhandlungen I-III* s Paulem Bernaysem, 1932-35.

Husserl, Edmund (1859-1938) Jeden z předních evropských fenomenologů. Hlavní díla: *Logische Untersuchungen* (Logická zkoumání) 1900, *Formale und traszendentale Logik* (Formální a transcendentální logika) 1929, *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentalen Phänomenologie* (Krize evropských věd a transcendentální fenomenologie) 1936.

Church, Alonzo (1903–1974) Americký logik a matematik. Tvůrce tzv. λ-kalkulu, jehož prostřednictvím byla dokázána ekvivalence teorie rekurzívních a teorie vyčíslitelných funkcí.

Jevons, William Stanley (1835–1882) Studoval přírodní vědy na *University College* v Londýně. Zabýval se politickou ekonomií a matematickou logikou, též počtem pravděpodobnosti. Zkonstruoval mechanické logické stroje (logické pravítko a logický klavír). Nejznámnější dílo: *Principles of Science* (Principy vědy) 1874.

Kleene, Stephen Cole (1909–1994) Studoval na Amherst College, doktorát získal v r. 1934 na universitě v Pricetonu, kde jeho školitelem byl Alonzo Church. Patří spolu s Churchem, Gödelem a Turingem k tvůrcům teorie rekurze. Přispěl k rozvoji idejí intuicionistické logiky. Nejznámnější publikace *Introduction to Metamathematics* (1952), *Mathematical Logic* (1967).

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716) Německý matematik a filozof, v matematice zakladatel logicismu, je možné ho považovat za předchůdce moderní formální logiky chápané jako kalkul. Nezávisle na Issacu Newtonovi položil základy infinitessimálního počtu, kde se dodnes požívá jeho symbolika. Hlavní díla: *Théodicée* (Theodicea) 1710, *Monadologie* 1714.

Lewis, Clarence Irving (1883–1964) Profesor filozofie na Harvardově univerzitě. Zakladatel moderní modální logiky. Zavedl a obhajoval pojem striktní implikace v protikladu k materiální implikaci. *Survey of Symbolic Logic* (Přehled symbolické logiky) a *Symbolic Logic* s C. H. Langfordem.

Łukasiewicz, Jan (1878–1956) Polský filozof a logik. Profesor na univerzitě ve Lvově a Varšavě. Jeden ze zakladetelů moderní formální modální logiky. Hlavní díla: *Elementy logiki matematycznej* (Základy matematické logiky) 1929, *Zur Geschichte der Aussagenlogik* (K dějinám výrokové logiky) 1936, *A system of modal logic* (Systém modální logiky) 1952, *Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic* (Aristotelova sylogistika z hlediska moderní formální logiky) 1957.

Mill, John Stuart (1806–1873) Zakladatel induktivní logiky. Hlavní díla *A System of Logic* (Systém logiky) 1843, *The principles of science, a treatise on logic and scientific method* (Principy vědy, pojednání o logice a vědecké metodě) 1874.

Peirce, Charles Sanders (1839–1914) Studoval na Harvardu. Zbýval se geodezií, kde se seznámil s konformními projekcemi map pro které vzužil eliptických funkcí. V logice navázal na práci svého otce Benjamina Peirce o asociativních algebrách, matematické logice a teorii množin. Zabával se též problémem čtyř barev.

Post, Emil Leon (1897–1954) Narodil se v polském Augostówě. Jeho rodina odešla do USA, když mu bylo sedm let. Zemřel v New Yorku. V článku o tabulkové metodě zavedl pojem konzistence (bezespornost) a pojem úplnosti. Ve své disertaci dokázal bezespornost dvouhodnotého výrokového kalkulu. Zabýval se i trojhodnotovou logikou v algebraickém pojetí. Rovněž se věnoval teorii rekurze.

Quine, Willard van Orman (* 1908) Od r. 1948 profesorem na Harvardu. Zabýval se nejen logikou, ale i filozofií jazyka a analytickou filozofií. Měl velmi blízko k Vídeňskému kruhu, ve filozofii navazoval na Rudolfa Carnapa. Hlavní díla: *On what there is* (O tom, co je) 1948, *Two Dogmas of Empiricism* (Dvě dogmata empirismu) 1951, *From Logical Point of View* (Z logického hlediska) 1953, Word and Object (Slovo a objekt) 1960.

Russell, Bertrand Arthur William (1872–1970) Anglický logik, matematik, filozof a veřejný činitel. Člen sněmovny lordů. Nositel Nobelovy ceny za literaturu 1950. Od r. 1895 *Fellow of Trinity College*, Cambrige. 1910–16 University of Cambridge, později různé instituce. Významně ovlivnil studium logických základů matematiky. Hlavní díla z logiky a matematiky: *Principia Mathematica, 3 díly* s A. N. Whiteheadem 1910–13, *Introduction to Mathematical Philosophy* (Úvod do matematické filozofie) 1918, *An Inquiry into Meaning and Truth* (Zkoumání významu a pravdy) 1940.

Skolem, Albert Thoralf (1887–1963) Norský matematik a logik. Po něm je pojmenována metoda eliminace existenčních kvantifikátorů.

Tarski, Alfred (1901–1983) Polský matematik a logik, člen lvovsko–varšavské školy. Od čtyřicátých let žil v USA. V logice definoval pojem pravdy, modelu a sémantického vyplývání. Hlavní díla: *Der Warheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* (Pojem pravdy ve formalizovaných jazycích) 1936, *Undecidable theories* (Nerozhodnutelné teorie)1953, *Logic, Semantics, Metamathematics* (Logika sémantika, metamatematika), 1956.

Turing, Alan Mathinson (1912–1954) Anglický matematik a logik, dnes bychom asi přidali označení informatik (ve smyslu anglického *computer science*). Zavedl mj. teoretický matematický koncept počítače, který je dnes nazýván *Turingův stroj*.

Venn, John (1834–1923) Je znám jako jeden z tvůrců booleovské matematické logiky diagramové metody reprezentace množin a jejich sjednocení a průniků. Vennovy diagramy mají vztah k Eulerovým diagramům. Hlavní díla: *Symbolic logic* (1881), *The Principles of Empirical Logic* (Principy empirické logiky), 1889.

Wiles, Andrew John (* 1953) V r. 1993 pozitivně rozřešil tzv. velkou Fermatovu větu jejíž řešení se hledalo 350 let.

Whitehead, Alfred North (1861–1947) Britský filozof a matematik. Studoval na *Trinity College*, Cambridge. Profesor na řadě univerzit, v letech 1924–38 na Harvardově univerzitě. Spolupracovník B. Russela, s nímž napsal *Principia Mathematica*. Další díla: *An Enquiry concerning the Principles of Natural Knowledge* (Zkoumání týkající se přirozených znalostí) 1919, *Science and the Modern World* (Věda a moderní svět) 1926, *Symbolism* (Symbolismus) 1928, *Adventures of Ideas* (Dobrodružství ideí) 1933.

Wittgenstein, Ludwig (1889–1951) Rakouský filozof, žák Russelův. Od r. 1929 až do své smrti působil na univerzitě v Cambridge. Od r. 1939 profesorem. Jeden ze zakladatelů analytické filozofie. Hlavní díla: *Logish-philosophische Abhandlung* (Logicko-filozofické pojednání) 1921, druhé vydání nazvané *Tractatus logico-philosophicus* 1922, *Philosophische Untersuchungen* (Filozofická zkoumání), Oxford 1953.

Tento stručný přehled má samozřejmě daleko k úplnosti. Čtenář může najít další informace v reprezentativní publikaci manželů Knealeových [33], v níž se autoři zabývají hlavními proudy ve vývoji logiky od Aristotela až po dnešek. Užitečnou informaci mohou přinést některé specializované databáze jako např. Hypatia, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/ a další.

Kapitola 9

Dodatek: Matematické zázemí

9.1 Základní matematické pojmy

V tomto dodatku uvádíme pro úplnost základní matematické pojmy, se kterými je patrně čtenář z dřívějšího studia dobře seznámen, ale někdy možná má pochybnosti o přesných definicích, které tvoří nezbytné pojmové zázemí. Cílem je sjednotit terminologii a případně osvěžit základní pojmy.

9.1.1 Množiny a vztahy mezi množinami

Množinou rozumíme soubor nějakých věcí či objektů, které obvykle nazýváme prvky. Mluvíme například o množině přirozených čísel, množině reálných čísel, množině všech přímek v rovině, množině všech dětí narozených na určitém území v určitém časovém období, množině příznaků dané choroby apod. Množiny jsou základní objekty, se kterými budeme pracovat.

Množinu lze vymezit různými způsoby. Výčet prvků (seznam) je způsob vymezení množiny. kterého je vhodné použít při malém počtu prvků. Množina obsahující všechna lichá čísla menší než 13 může být snadno zadána seznamem, což zapíšeme takto: $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Protože se v množině staráme pouze o prvky samotné, nezáleží nám na jejich pořadí, seznam $\{11, 5, 1, 3, 7, 9\}$ vymezuje tedy tutéž množinu. Některé množiny - a v matematice je jich velmi mnoho, dá se říci většina - nemohou být zadány seznamem. Tuto vlastnost mají všechny nekonečné množiny, a proto je třeba, abychom je vymezili jinak. Například tak, že pro prvky definované množiny vytkneme určitou charakteristickou vlastnost, tj. vlastnost, kterou mají všechny prvky uvažované množiny a kterou žádné jiné věci nemají. Příkladem může být množina všech celočíselných násobků čísla tři. Jiným příkladem bude množina všech přirozených čísel dělitelných sedmi nebo množina všech prvočísel. V taxonomii například je takové jednoznačné vymezení množiny často cílem. Jde třeba o množinu všech zvířat daného druhu. Zpravidla se hledá nejmenší soubor vlastností či znaků, který takovou množinu vymezuje.

I konečné množiny mohou být zadány charakteristickou vlastností. Tak například hovoříme o množině všech kořenů rovnice n-tého stupně (což je nejvýše n-prvková, tedy konečná množina), o množině všech symbolů užitých v tomto textu (což je množina konečná, sice o velkém počtu prvků, které by se nicméně daly spočítat), o množině příznaků vředového onemocnění žaludku apod.

Nechť φ je nějaká vlastnost; množinu všech prvků x, které mají vlastnost φ, budeme označovat $\{x; \varphi(x)\}$, např. $\{x;$ číslo 7 dělí číslo x $\}$.

Dalším příkladem vymezení prvků některých typů množin je *rekurentní* (někdy říkáme *induktivní*) definice. Rekurentně vymezíme množinu takto: Alespoň o jedné věci (o jednom objektu) ukážeme, že je prvkem definované množiny M. Na základě pravidla, které říká, jak ze znalosti nějakého prvku množiny M zkonstruovat jiný prvek množiny M, můžeme postupně generovat všechny prvky množiny M. Příkladem může být zadání množiny, jejíž prvky tvoří geometrickou posloupnost, vzorcem: $a_o = 2, a_{n+1} = a_n q, q = 3$. Podle tohoto předpisu můžeme postupně konstruovat prvky $a_1 = 6, a_2 = 18, a_3 = 54$ atd. Když $q = 2$, pak jde o tzv. binární dělení (např. každá buňka se v každé generaci, tj. pro každé n, rozdělí na dvě nové buňky). Je však patrné, že rekurentní definicí nelze vymezit každou množinu.

Pro větší stručnost a přehlednost vyjadřování používáme různých zkratek. Například výraz $x \in M$ je zkratkou výrazu *x je prvkem množiny M*. Zápisem $x \notin M$ vyjádříme, že x není prvkem množiny M.

Dvě množiny se rovnají, mají-li stejné prvky.

Příklad: Množina všech kořenů kvadratické rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$ a množina všech celých čísel z otevřeného intervalu $(0, 3)$ se rovnají, což zjistíme snadno, porovnáme-li seznamy obou množin. Interval $(0, 3)$ obsahuje z celých čísel pouze čísla $1, 2$, což jsou právě kořeny uvedené kvadratické rovnice. Rovněž $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\} = \{11, 7, 9, 5, 1, 3\}$. Množina $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se nerovná množině N všech dělitelů čísla 12, neboť $5 \in M$, ale $5 \notin N$.

Množina, která neobsahuje žádný prvek, se nazývá *prázdná*. Množina všech celých čísel z intervalu $(24, 27)$ dělitelných třemi je prázdná, neboť tento interval obsahuje pouze dvě celá čísla, 25 a 26, a ani jedno z nich není dělitelné třemi. Prázdná je také množina písmen arabské abecedy užitých v tomto textu, o čemž se můžeme přesvědčit podrobným přečtením celé knihy. Naproti tomu množina všech řeckých písmen použitých v tomto textu je neprázdná. Jiný příklad: Množina všech aktivně létajících plazů je prázdná stejně jako množina všech slonů žijících za polárním kruhem. Vzhledem k tomu, že množina je určena svými prvky, existuje jediná prázdná množina, kterou označíme $\emptyset$. Nebo jinak, všechny prázdné množiny jsou si rovny - mají stejné vlastnosti.

Z množin můžeme tvořit nové množiny i tak, že výchozí množiny se stanou prvky nových množin. Dostáváme tak množiny množin, množiny množin množin, atd. Množina $\{\emptyset\}$ není prázdná, protože obsahuje právě jeden prvek, totiž prázdnou množinu. Je to množina jednoprvková.

Průnikem $M \cap N$ množin M, N rozumíme množinu všech prvků náležejících jak do M, tak do N, tj. pro každé x platí

$$x \in M \cap N \Leftrightarrow (x \in M \wedge x \in N),$$

Sjednocením $M \cup N$ množin M, N rozumíme množinu všech prvků, náležejících alespoň do jedné z množin M, N, tj.

$$x \in M \cup N \Leftrightarrow (x \in M \vee x \in N),$$

Rozdílem $M - N$ množin M, N rozumíme množinu všech prvků z M, které nepatří do N. Někdy také hovoříme o *doplňku množiny* N *v množině* M. Jestiže množina M je pevně určena, používáme pro doplněk označení $-N$.

Řekneme, že N je *částí* (podmnožinou) M (označení $N \subseteq M$), když každý prvek z N patří také do M. Jestliže jedna množina je částí druhé, říkáme také, že obě množiny jsou ve vztahu *inkluze*. Povšimněme si, že průnik, sjednocení a rozdíl jsou operace na množinách, které z jeděnch množin vytvářejí nové množiny, kdežto inkluze je vztah mezi množinami. O uvedených množinových operacích a o vztahu inkluze platí řada elementárních tvrzení, která lze snadno ověřovat pomocí grafického znázornění. Mezi taková důležitá tvrzení patří např. tvrzení, kterého se velmi často používá při dokazování rovnosti dvou množin: *Jestliže jedna množina je částí druhé a naopak, pak se množiny rovnají.* Symbolicky: $M \subseteq N$ a $N \subseteq M$, potom $M = N$.

Snadno se přesvědčíme o tom, že průnik a sjednocení jsou asociativní a komutativní operace. To však neplatí pro rozdíl.

Důležitou roli v řadě, úvah hraje množina všech podmnožin dané množiny, tzv. *potenční množina.* Nechť N je množina sestávající ze dvou prvků, např. $N = \{1, 2\}$. Potenční množina $\mathcal{P}(N)$ množiny N pak sestává ze čtyř množin, tj. $\mathcal{P}(N) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$. Prázdná množina je podmnožinou každé množiny. Snadno si rozmyslíme, že potenční množina n-prvkové množiny má 2^n prvků, neboť je právě tolik podmnožin. Ještě příklad pro $n = 3$. Nechť $N = \{1, 2, 3\}$, potom

$$\mathcal{P}(N) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Nechť M, N jsou množiny. *Kartézským součinem* $M \times N$ množin M, N rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$ takových, že $x \in M$, $y \in N$. Protože kartézský součin[1] je definován pomocí uspořádaných dvojic, neplatí $M \times N = N \times M$, tj. kartézský součin není komutativní, nelze zaměnit pořadí množin právě proto, že jde o uspořádané dvojice prvků.

Snadno také ověříme, že $M \times \emptyset = \emptyset \times M = \emptyset$. Obecně můžeme definovat n-ární kartézský součin $M_1 \times \ldots \times M_n$ množin $M_1, \ldots, M_n$ jako množinu všech uspořádaných n-tic $[x_1, \ldots, x_2]$ takových, že $x_i \in M_i$ (pro $i = 1, \ldots, n$). Jestliže $M_i = M$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, označujeme takový kartézský součin (tj. množinu všech uspořádaných n-tic prvků z M) symbolem M^n a nazýváme jej *n-tou mocninou* množiny M.

9.1.2 Relace, operace, funkce

Dosud jsme hovořili o množinách a operacích na množinách. Nyní přejděme k velmi důležitému pojmu relace, který je matematickým vyjádřením toho, co v obvyklé mluvě označujeme výrazem *vztah* mezi objekty či prvky nějaké dané množiny. Jestliže v matematice hovoříme o relaci či vztahu, pak máme obvykle na mysli dvojice (v obecném případě n-tice) objektů, které jsou či nejsou v daném vztahu. Na tyto dvojice se můžeme dívat jako na prvky jisté množiny, přesněji množiny uspořádaných dvojic, kterou budeme nazývat *relace* mezi uvažovanými objekty. V tomto odstavci si také ukážeme, jak souvisí pojem relace s pojmem operace na množině, a dále to, že zvláštním případem relace je snad nejdůležitější matematický pojem - *pojem funkce*.

Binární relací R mezi množinami M, N rozumíme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $M \times N$. Tedy $R \subseteq M \times N$. Dva prvky x, y jsou v relaci R, když $[x, y] \in R$. V takovém případě píšeme $R(x, y)$ nebo také xRy. Jestliže $M = N$, říkáme stručně, že R je relace na M.

Množinu všech prvků x takových, že k nim existuje prvek y tak, že $[x, z] \in R$, nazveme *definiční obor relace* R a označíme jej $\mathcal{D}(R)$, tedy $\mathcal{D}(R) = \{x; [x, y] \in R\}$. *Inverzní relace* R^{-1} k relaci R je taková relace, která obsahuje uspořádanou dvojici $[x, y]$ právě tehdy, když $[y, x] \in R$. Pomocí inverzní relace snadno definujeme obor hodnot $\mathcal{H}(R)$ relace R takto: $\mathcal{H}(R) = \mathcal{D}(R^{-1})$. Tedy oborem hodnot relace je definiční obor inverzní relace. Definiční obor relace spolu s oborem hodnot se nazývá *pole* této relace.

Nechť M je libovolná množina. Symbolem I_M budeme označovat identitu na M, tj. relaci $I_M = \{[x, y]; x = y \land x \in M\}$, neboli $\{[x, x]; x \in M\}$.

Nechť R, S jsou relace. Složená relace $R \circ S$ je taková relace, že $[x, y] \in R \circ S$ právě tehdy, když existuje z tak, že $[x, z] \in S \land [z, y] \in R$. Relace $R \circ S$ se též někdy nazývá *relativní součin* relací R, S. Skládání relací není komutativní, obecně totiž neplatí $R \circ S = S \circ R$.

[1] Termín *kartézský součin* se používá na počest francouzského matematika a filozofa René Descarta, lat. Cartesia.

Řekneme, že relace R na množině M je *reflexivní na* M, když pro každé $x \in M$ platí xRx. Relace R je *symetrická na* M, když pro každé $x, y \in M$ platí $xRy \Rightarrow yRx$ a je *tranzitivní na* M, když pro každé $x, y, z \in M$ platí $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.

Například relace rovnosti mezi čísly je reflexivní, neboť každé číslo je rovno samo sobě, zatímco relace "*být menší než*", kterou obvykle označujeme $<$, není reflexivní, neboť např. není pravda, že $5 < 5$. Relace rovnosti je jistě symetrická, zatímco relace $<$ symetrická není, protože např. $3 < 5$, ale neplatí $5 < 3$. Obě relace jsou však tranzitivní. Jistě např. platí že když $3 < 5$ a $5 < 6$, tak $3 < 6$.

Řekneme, že relace R je na M *asymetrická*, když pro každé x, y platí $xRy \Rightarrow \neg(xRy)$; je *slabě asymetrická na* M, když $(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow (x = y)$; je *souvislá* (též *trichotomická*) *na* M, když pro každé $x, y \in M$ platí $(xRy) \vee (yRx)$, neboli $x < y \vee x = y \vee y < x$.

Příklad: Relace $<$ (*být menší než*) je na množině přirozených čísel asymetrická ($x < y \Rightarrow y \not< x$), ale není souvislá, protože není už ani reflexivní. Snadno totiž uvážíme, že k tomu, aby relace byla souvislá, musí být reflexivní. Pro relaci $<$ mezi přirozenými čísly jistě neplatí $x < x$. Fakt, že relace není souvislá, vlastně znamená, že existuje dvojice prvků, pro kterou neplatí ani xRy, ani yRx, nebo jinak řečeno, existují nesrovnatelné prvky.

Rovněž není těžké si rozmyslet, že relace R je reflexivní na M právě tehdy, když obsahuje identitu, tj. když $I_M \subseteq R$, je symetrická, když $R = R^{-1}$, a je tranzitivní, když obsahuje složenou relaci $R \circ R$..

Příklad: Když $R =$ "*být rodičem*" na množině lidí, tak $R \circ R =$ "*být prarodičem*".

Relace, která je na množině M reflexivní, symetrická a tranzitivní, se nazývá *ekvivalence na* M. Zřejmě I_M a $M \times M$ jsou ekvivalence na M. Přitom I_M je v jistém smyslu nejjemnější a $M \times M$ je nejhrubší možná ekvivalence na M, neboť pro každou ekvivalenci E na M platí $I_M \subseteq E \subseteq M \times M$. Nechť E je ekvivalence na M. Faktorizací množiny M podle E rozumíme množinu množin (někdy říkáme též systém množin)

$$M/E = \{E(x); x \in M\},$$

kde $E(x) = \{y; y \in M \wedge xEy\}$. Množiny $E(x)$ nazýváme *třídy ekvivalence v* E. Faktorizací množiny podle ekvivalence dosáhneme toho, že v dalších úvahách, kde se vyskytne ekvivalence E, nemusíme rozlišovat mezi prvky, které patří do téže třídy ekvivalence; můžeme je z hlediska těchto úvah ztotožnit.

Nechť I je opět indexová množina. *Rozkladem na množině* M budeme rozumět takový systém množin $M_i (i \in I)$, že pro všechna $i \in I$ je $M_i \subseteq M$, každé dvě různé množiny M_k, M_j jsou disjunktní (tj. $M_k \cap M_j = \emptyset$) a $M = \bigcup M_i$.

Zřejmě každá relace ekvivalence určuje rozklad na M, což lze vyjádřit také tak, že každá faktorizace množiny podle ekvivalence je rozkladem a také opačně.

Relace R na M se nazývá *částečné uspořádání množiny* M, když R je reflexivní, tranzitivní a slabě asymetrická (tj. když platí $(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow x = y$). Řekneme, že množina M je *lineárně uspořádaná relací* R, když R je navíc *souvislá*, tj. když každé dva prvky jsou relací R srovnány.

Mnoho množin, se kterými přicházíme často do styku, má a priori nějaké "přirozené" uspořádání. Tak například přirozená čísla jsou uspořádána podle velikosti, slova v dané abecedě jsou uspořádána lexikograficky, tzn. jako slova ve slovníku, apod. Ovšem i na těchto množinách můžeme definovat jiné relace uspořádání (např. slova podle délky).

V terminologii uspořádaných množin neexistuje v literatuře úplná shoda. Často se uspořádaným množinám říká pouze uspořádané, nebo naopak se termín částečného uspořádání ponechává tak, jak jsme jej definovali a množiny lineárně uspořádané se nazývají prostě *uspořádané*. Aby nevznikly zbytečné nejasnosti, volíme raději obšírnější terminologii pouze s přívlastky, abychom zdůraznili, že v případě částečného uspořádání mohou existovat nesrovnatelné prvky a že v případě lineárního uspořádání si lze prvky uspořádané množiny představit seřazené do řetězce.

9.2 Ještě poznámka o nekonečnu

Porozumění nekonečným množinám je důležitým předpokladem porozumění mnohým problémům moderní logiky. Studenti, kteří dnes přicházejí na vysoké školy bohužel toho o nekonečnu ani po úspěšné maturitě příliš nevědí.[2] Nezbývá nám tedy než některá fakta připomenout. Týká se to např. počtu prvků nekonečných množin neboli kardinálních čísel. Počet prvků konečné množiny vyjadřujeme přirozeným číslem, u nekonečných množin takovou možnost nemáme. Musíme se tedy obrátit k jiné možnosti, jak porovnávat, která ze dvou nekonečných množin obsahuje více prvků. K tomu obvykle slouží pojem zobrazení. Řekneme, že dvě množiny M, N mají *stejný počet prvků* (a to platí pro všechny, tedy i konečné množiny), když existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi M a N a píšeme $M \approx N$. Když existuje jednoznačné zobrazení M do N, ale nikoli naopak, tj. zobrazení N do M, řekneme, že první množina je "menší než" ta druhá a píšeme $M \prec N$. To je základní možnost jak porovnávat množství prvků nekonečných množin. Nekonečné množiny, jak snad víme, mají tu podivnou vlastnost (kterou nemají množiny konečné), že se může stát, že nekonečná množina je vzájemně jednoznačně zobrazitelná na svoji vlastní část. Např. množinu všech přirozených čísel lze snadno vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu všech sudých čísel, což je jistě

[2] Možná k tomu přispělo poněkud problematické zrušení povinnosti skládat maturitní zkoušku také právě z matematiky.

její podmnožina. Mohlo by se tedy zdát, že touto vlastností oplvývají všechny nekonečné množiny. Ale tak tomu není. Připomeneme si proto již víc než sto let známou větu, podle které existují nekonečné množiny, které na sebe zobrazitelné nejsou. Z matematiky si možná vzpomínáme, že množinu všech přirozených čísel nelze vzájemně jednoznačně zobrazit na množinu všech čísel reálných.

9.2.1 Cantorova věta

Pro každou množinu M platí: $M \prec \mathcal{P}(M)$, kde znaménko uspořádání chápeme ve shora uvedeném smyslu, že totiž neexistuje zobrazení z druhé množiny do první.

Chceme tedy dokázat, že neexistuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M na její potenční množinu $\mathcal{P}(M)$.

Důkaz (sporem): Nechť f má takovou vlastnost. Uvažujme množinu $Z = \{m \in M; m \notin f(m)\}$. Zajisté $Z \subseteq M$, tj. $Z \in \mathcal{P}(M)$. Ukážeme, že množina Z nemá vzor v zobrazení f.

Kdyby totiž nějaké v bylo vzorem množiny Z, tj. kdyby $f(v) = Z$, tak by (podle definice této množiny) pro každé $m \in M$ platilo

$$m \notin Z \Leftrightarrow f(m)$$

a speciálně pro v by platilo

$$v \in Z \Leftrightarrow v \notin f(v),$$

což ale není možné, protože $f(v) = Z$.

Lemma 9.2.1 *Každé zobrazení $f : \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}$, které je monotónní (vůči inkluzi), tj. pro které platí*

$$x \subseteq y \Rightarrow f(x) \subseteq f(y),$$

má pevný bod, tj. existuje takové $c \in \mathcal{P}(X)$, že $f(c) = c$).

Důkaz:

$$C = \{u \subseteq X; u \subseteq f(u)\}$$
$$c = \cup C$$

Zřejmě $c \subseteq X$ a pro všechna $u \in C$ platí $u \subseteq c$. Protoře F je mnotónní, tak pro každé $u \in C$:

$$u \subseteq f(u) \subseteq f(c)$$

. A tudíž $c = \cup C \subseteq f(c)$. A opět díky monotónnosti zobrazení f

$$f(c) \subseteq f(f(c)),$$

což znamená, že také $f(c) \in C$ a tudíž $f(c) \subseteq c$, což jsme měli dokázat.

9.2.2 Věta Cantor-Bernsteinova

$$X \preceq Y \wedge Y \preceq X \Rightarrow X \approx Y$$

Důkaz: Sestrojme nejprve zobrazení $H : \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}(X)$ tak, že pro každé $x \in X$

$$H(x) = X - g(Y - f(x))$$

kde H monotónní vzhledem k inkluzi; c je fixpunkt (pevný bod) zobrazení podle předchozího lemmatu, tj.

$$c = H(c) = X - g(Y - f(c))$$

Potom

$X - c = X - (X - g(Y - f(c)))$
$X - c = g(Y - f(c))$

Zobrazení $h : X \mapsto Y$ pak definujeme takto:

$h(a) = f(a)$ pro $a \in c$
$h(a) = g^{-1}(a)$ pro $a \in X - c$.

Zřejmě h je prosté zobrazení X na Y, což jsme chtěli dokázat.

Literatura

[1] **Adams, E.**: The Logic of Conditionals. D. Reidel, Dordrecht 1975.

[2] **Ajzerman, Mark Avronovič a kol.**: Logika, automaty a algoritmy. Academia, Praha 1971.

[3] **Bell, John:** The Logic of Time. D. Reidel, Dordrecht 1983.

[4] **Bendová, Kamila**: Sylogistika. Karolinum, nakl. Univerzity Karlovy, Praha 1998.

[5] **Besnard Philippe**: An Introduction to Default Logic. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - London - Tokyo - Hong Kong 1989.

[6] **Boolos, George**: The Logic of Provability. Cambridge University Press, Cambridge 1993.

[7] **Brewka, Gerhard**: Cumulative Default Logic: In Defense of Nonmonotonic Inference Rules. *Aritficial Intelligence 50* (1950) 183–205.

[8] **Brouwer, Luitzen Egbertus Jan**: Collected Works. North-Holland, Amsterdam 1975.

[9] **Mc Carthy, John**: Circumscription: A Form of a Non-monotonic Reasoning. Artificiall Intelligence 13 (1980) 27-39.

[10] **Chellas, Brian F.**: Modal Logic (An Introduction). Cambridge University Press, Cambridge 1988.

[11] **Chang, Chin-Liang - Lee, Richard Char-Tung**: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving. Academic Press, New York 1973.

[12] **Church, Alonzo**: Introduction to Mathematical Logic. Princeton University Press, Princeton (N. Y.) 1956.

[13] **Curry, Haskel, B.**: Foundations of Mathematical Logic. McGraw-Hill, New York 1963.

[14] **Delahaye, Jean-Paul**: Formal Methods in Artificial Intelligence. John Wiley & Sons, New York 1986.

[15] **Demlová, Marie – Pondělíček, Bedřich**: Matematická logika. Vydavatelství ČVUT, Praha 1997.

[16] **Dix, Jürgen**: Default Theories of Poole-Type ans a Method for Constructing Cumulative Versions of Default Logic. In B. Neumann (ed.) *Proc. of the 10th European Conf. on Artificial Intelligence ECAI '92*. John Wiley & Sons, 1992, 289–293.

[17] **Gabbay, Dov**: What is Negation in a System? In: Drake, F. R. and Truss, J. K. (eds.) Logic Colloquium '86, Elsevier 1988, 95-112.

[18] **Gabbay, Dov - Guenthner, F. (eds.)**: Handbook of Philosophical Logic. Vol. I-IV. D. Reidel Publ., Dordrecht, 1983.

[19] **Gärdenfors, Peter**: Knowledge in Flux. MIT Press, 1988.

[20] **Gupta, Anil - Belnap, Nuel**: The Revision Theory if Truth. MIT Press, Cambridge (Mass.) 1993.

[21] **Grzegorczyk, Andrzej**: Zarys Logiki Matematycznej. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1961.

[22] **Hájek, Petr**: Metamatematics of Fuzzy Logic. Kluwer Academic Publishers, Amsterdam 1998.

[23] **Henkin, Leon**: The Completeness of the First-Order Functional Calculus. *Journal of Symbolic Logic* 14 (1949), 159-166.

[24] **Heyting, Arend**: Intuicionism. Amsterdam 1956.

[25] **Hughes, G. E. - Cresswell, Max J.**: An Introduction to Modal Logic. Methuen Co., New York, 1969.

[26] **Jirků, Petr**: Theory of Logical Consequence. Acta Universitatis Carolinae, Studia Logica II, Praha 1974, 11-31.

[27] **Jirků, Petr - Materna, Pavel**: Znalosti, logika, usuzování. In: Sborník semináře SOFSEM '90, Janské Lázně 1990, 187-206.

[28] **Jirků, Petr - Štěpánek, Petr - Štěpánková, Olga**: Programování v jazyku Prolog. SNTL, Praha 1990.

[29] **Kolář, Petr**: Argumenty filozofické logiky. FILOSOFIA - $\Phi I\Lambda O\Sigma O\Phi IA$, Praha 99.

[30] **Kolář, Jiří - Štěpánková, Olga - Chytil, Michal**: Logika, algebry a grafy. SNTL/Alfa, Praha 1989.

[31] **Kleene, Stephen Cole**: Introduction to Metamathematics. D. van Nostrand Company, Princeton New Jersey, 1952.

[32] **Kleene, Stephen Cole**: Mathematical Logic. John Wiley & Sons, New York 1968.

[33] **Kneale, William - Kneale, Martha**: The Development of Logic. Clarendon Press, Oxford 1984.

[34] **Konolige, Kurt**: A Deduction Model of Belief (Research Notes in Artificial Intelligence Series). Pitman, London 1986.

[35] **Konolige, Kurt**: On the Relation between Default Theories and Autoepistemic Logic. Proceedings IJCAI-87, Milan 1987, 394-401.

[36] **Kowalski, Robert**: Logic for Problem Solving. North-Holland, Amsterdam 1979.

[37] **Krejčí, František**: Logika. I. L. Kober nakl., Praha 1914.

[38] **Kriesel, Georg - Krivine, Jean-Louis**: Elements of Mathematical Logic (Model Theory). North-Holland, Amsterdam 1967.

[39] **Kripke, Saul A.**: A Completeness Theorem in Modal Logic. *Journal of Symbolic Logic* 24 (1959) 1-14.

[40] **Lukaszewicz, Witold**: Non-monotonic Reasoning. Formalism of Commosense Reasoning. Ellis Horwood Ltd. 1990.

[41] **Lyndon, Roger C.**: O logice matematycznej. PWN, Warszawa 1968.

[42] **Malina, Jaroslav - Novotný, Jan**: Kurt Gödel. Nadace Universitas Masarzkiana, Brno 1996.

[43] **Manna, Zohar**: Mathematical Theory of Computation. Mc Graw-Hill, New York 1974.

[44] **Mendelson, Elliot**: Introduction to Mathematical Logic. D. van Nostrand Comp., Princeton (N. Y.) 1964.

[45] **Mleziva, Miroslav**: Neklasické logiky. Svoboda, Praha 1970.

[46] **Monk, J. Donald**: Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin 1976.

[47] **Moore, Robert C.**: Semantical Considerations on Nonmonotonic Logic. Proceedings IJCAI-83, Karlsruhe, FRG, 1983, 272-279.

[48] **Nilsson, Nils**: Principles of Artificial Intelligence. Tioga, Palo Alto 1980.

[49] **Post, Emil Leon**: Introduction to a General Theory of Elementary Propositions. *American Journal of Mathematics 43* (1921) 163-185.

[50] **Przymusiński, T. C.**: On the Relationship between Logic Programming and Non-monotonic Reasoning. Proceedings AAAI-88, 1988, 444-448.

[51] **Rasiova, Helena - Sikorski, Roman**: The Mathematics of Metamathematics. PWN, Warszawa 1957.

[52] **Reiter, Raymond**: A Logic for Default Reasoning. Artificiall Intelligence 13 (1980) 81-132.

[53] **Rieger, Ladislav**: Algebraic Methods of Mathematical Logic. Academia, Praha 1967.

[54] **Robinson, J. A.**: A Machine Oriented Logic Based on the Resolution Principle. Journal ACM 12 (1965), 23-41.

[55] **Shoham, Yoav**: Nonmonotonic Logics: Meaning and Utility. Proc. IJCAI-87. Milano 1987, 388-393.

[56] **Shoham, Yoav**: Reasoning about Change. MIT Press, 1988.

[57] **Shoenfield J. R.**: Mathematical Logic. Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass.) 1967.

[58] **Smullyan, Raymond M.**: First-order Logic. Springer-Verlag, Berlin 1968.

[59] **Smullyan, Raymond M.**: Forever Undecided: A Puzzle Guide to Gödel. Alfred A. Knopf, 1987.

[60] **Smullyan, Raymond M.**: Gödel's Incompleteness Theprems. Oxford University Press, New York - Oxford 1992.

[61] **Štěpán, Jan**: Formální logika. Nakladatelství a vydavatelství FIN, Olomouc 1995.

[62] **Tarski, Alfred**: O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej. Lwów - Warszawa 1936. (Český překlad: Academia, Praha 1969).

[63] **Tarski, Alfred**: The semantic conception of truth. *Philos. Phenomenological Research* 4 (1944) 13-47.

[64] **Tarski, Alfred**: Introduction to Logic and to Methodology of Deductive Sciences. Gauthier-Villno, Paris 1971. (Český překlad: Academia, Praha 1964).

[65] **Turner, Raymond**: Truth and Modality for Knowledge Representation. Pitman, London 1990.

[66] **Tugenhat, Ernst – Wolf, Ursula**: Logicko-sémantická propedeutika. Nakl. Petr Rezek, Praha 1997,

[67] **Tvrdý, Josef**: Logika. Melantrich, Praha 1937.

[68] **Wójcicki, Ryszard**: Theory of Logical Calculi (Basic Theory of Consequence Operations). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1988.