

## 3 Teorie her

Základy matematické teorie her položili v první pol. 20. století John von Neumann a Oskar Morgernstern. Teorie her je disciplína aplikované matematiky, která analyzuje široké spektrum konfliktních rozhodovacích situací, které mohou nastat kdekoliv, kde dochází ke střetu zájmů. Herně-teoretické modely se pak snaží tyto konfliktní situace nejen analyzovat, ale sestavením matematického modelu daného konfliktu a pomocí výpočtů se snaží nalézt co nejlepší strategie pro konkrétní účastníky takových konfliktů. Teorie her se uplatňuje v mnoha oblastech lidské činnosti od ekonomie, přes politologii až například po sociologii a biologii.

### 3.1 Základní pojmy

Základem většiny matematických modelů z oblasti teorie her je **předpoklad racionality**. Očekáváme, že **každý** hráč se chová tak, aby maximalizoval svůj zisk (výhru). To znamená, že:

- hráč si na základě stabilních preferencí stanovuje cíle a volí si strategie k co možná nejefektivnějšímu dosažení těchto cílů.
- hráč je konfrontován s určitým počtem situací a dokáže si je seřadit podle svých preferencí od nejvýhodnější po nejméně výhodnou.

Toto seřazení musí být úplné, tj. musí pokrývat všechny situace, a tranzitivní, tj. pokud dá hráč přednost situaci A před situací B a situaci B před situací C, musí dát přednost situaci A před situací C. Na základě preferencí situací je odvozena **užitková funkce** (utility function) hráče. Jediným cílem hráče je potom maximalizace hodnoty užitkové funkce.

Předpoklad racionality (každého hráče) je to, co odlišuje teorii her (a příslušné strategie) od teorie rozhodování. Jsou ale i pojetí, která chápou teorii rozhodování (popsanou v předcházející kapitole) jako speciální typ her, kdy jeden z hráčů je “příroda”, pro kterou předpoklad racionality neplatí.

Budeme-li hledat analogii s teorií rozhodování, pak hráči jsou účastníci rozhodovacího problému, strategie jsou rozhodnutí a hodnoty užitkové funkce (výhry, výplaty) jsou důsledky rozhodnutí.

#### 3.1.1 Typy her

Hry (a jejich modely) můžeme posuzovat z celé řady hledisek. Jsou to [Pelis]

- počet hráčů – obvykle předpokládáme konečný počet hráčů; nejmenší možný počet je 2 a to budou hry na které se dále zaměříme (příkladem mohou být šachy, dáma, piškvorky, ale i bilaterální politická vyjednávání),
- počet strategií – může být konečný i nekonečný; nás budou zajímat hry s konečným počtem strategií (šachy, dáma, piškvorky). U nekonečných strategií hraje roli i načasování jednotlivých „tahů“,
- typ výhry – rozlišují se tzv. **hry s konstantním součtem** a **hry s nekonstantním součtem**; pro hry s konstantním součtem platí, že pro každou volbu strategií je součet výplatních funkcí (výher) všech hráčů konstantní

speciálním případem her s konstantním součtem jsou **hry s nulovým součtem**, při kterých to, co jeden hráč vyhraje musí druhý hráč (v případě her o dvou hráčích) prohrát –

příkladem jsou šachy, piškvorky apod. U her s nenulovým součtem zisk jednoho hráče nemusí pro jiného hráče nutně znamenat ztrátu (věžňovo dilema i různá vyjednávání).

- počet tahů – **hry strategické** předpokládají, že hráči provedou jeden tah (rozhodnutí) současně (např. kámen-nůžky-papír nebo věžňovo dilema), **hry tahové** jsou založeny na sekvenci tahů, při kterých se hráči střídají (šachy, piškvorky)
- dostupná informace – **hry s úplnou informací** (např. šachy) a **hry s neúplnou informací** (např. poker); v hrách s úplnými informacemi má každý hráč k dispozici stejné informace týkající se hry jako všichni ostatní.
- spolupráce – u **kooperativních hrách** mohou hráči vytvářet koalice případně se mezi sebou domlouvat, u **nekooperativních hrách** to možné není

Ne všechny kombinace jednotlivých hledisek mohou nastat: každá hra dvou hráčů s konstantním součtem je nekooperativní – pro takovou hru se někdy používá termín **antagonistická hra**.

### 3.1.2 Hra v normálním tvaru

**Def. 3.1** Hra v normálním tvaru je definována množinou

$$\{Q, X_1, \dots, X_n, u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_n(x_1, \dots, x_n)\}$$

kde  $Q = \{1, \dots, n\}$  jsou hráči, množiny  $X_1, \dots, X_n$  jsou množiny strategií a  $u_i(x_1, \dots, x_n)$  jsou výhry hráče  $i$  pro jednotlivé strategie. Hra v normálním tvaru je obvykle znázorněna pomocí matice. Hru pro dva hráče vidíme na Obr. 1. Zde hráč číslo 1 vybírá ze strategií  $s_1, \dots, s_k$  a hráč číslo 2 vybírá ze strategií  $t_1, \dots, t_l$ . Předpokládejme, že se jedná o hru s nulovým součtem, v takové hře

$$u_1(s_i, t_j) = -u_2(s_i, t_j)$$

a proto stačí zapisovat jen hodnotu uživatelské funkce (výhry) pro jednoho hráče.

$$\begin{array}{c} \text{hráč 1} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_k \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{hráč 2} \\ \begin{matrix} t_1 & t_2 & \dots & t_l \end{matrix} \\ \left( \begin{array}{cccc} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1l} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{k1} & u_{k2} & \dots & u_{kl} \end{array} \right) \end{array}$$

**Obr. 1** Hra pro dva hráče v normálním tvaru.

Příklad zápisu (blíže nespecifikované hry) vidíme na Obr. 2.

$$\begin{array}{c} \text{hráč 1} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{hráč 2} \\ \begin{matrix} t_1 & t_2 \end{matrix} \\ \left( \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{array} \right) \end{array}$$

**Obr. 2** Příklad hry v normálním tvaru

Jiný příklad, tentokrát hry kámen-nůžky-papír je na Obr. 3

		hráč 2		
		K	N	P
hráč 1	K	0	1	-1
	N	-1	0	1
	P	1	-1	0

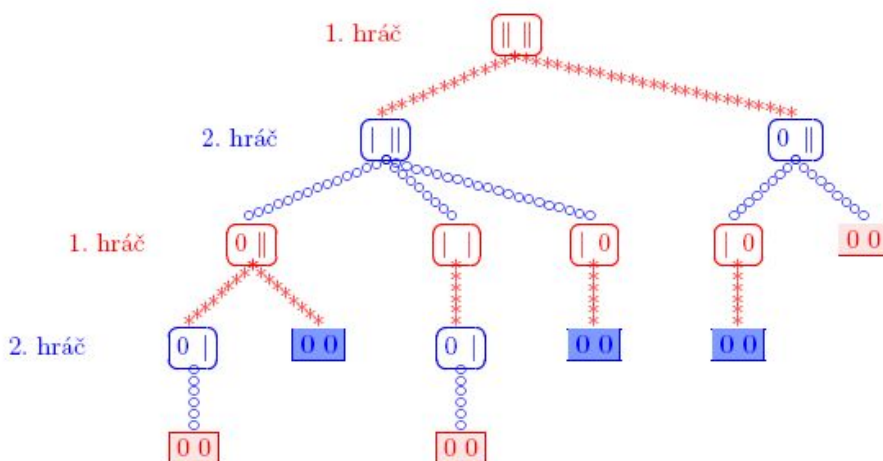
Obr. 3 Hra kámen-nůžky-papír v normálním tvaru

Normální tvar popisuje možné strategie a výplaty jednotlivých hráčů a umožňuje tak studovat otázku optimální strategie. Pokud nás bude zajímat způsob nalezení vhodné strategie, používá se zápis hry v explicitním tvaru.

### 3.1.3 Hra v explicitním tvaru

Explicitní tvar hry bývá používána k formalizaci her, ve kterých hraje roli pořadí tahů. Hry jsou reprezentovány jako stromy (viz obrázek vlevo). Každý uzel zde reprezentuje místo, ve kterém některý z hráčů vybírá tah, každá hrana odpovídá možnému tahu.

Zápis hry NIM v explicitním tvaru ukazuje Obr. 4. V této hře dvou hráčů jsou na počátku dvě hromádky dvou zápalek. Hráči střídavě odebírají z některé z hromádek jednu nebo dvě sirky. Prohraje ten z hráčů, který odebere poslední sirku. Na této „hře“ je zajímavé, že hráč číslo 2 vždy vyhraje. Proč?

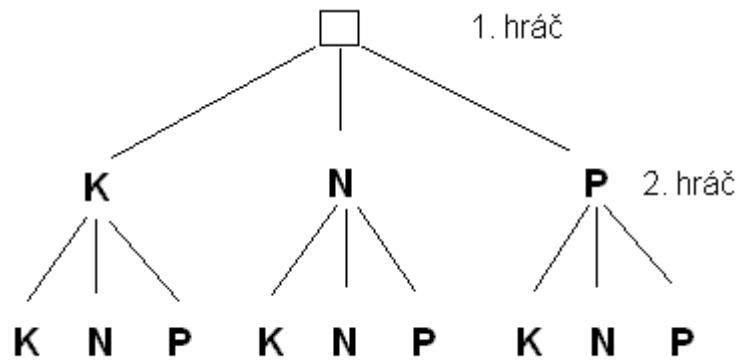


Obr. 4 Hra NIM v explicitním tvaru

**Věta 3.1:** Každou hru v explicitním tvaru lze převést na právě jednu hru v normálním tvaru.

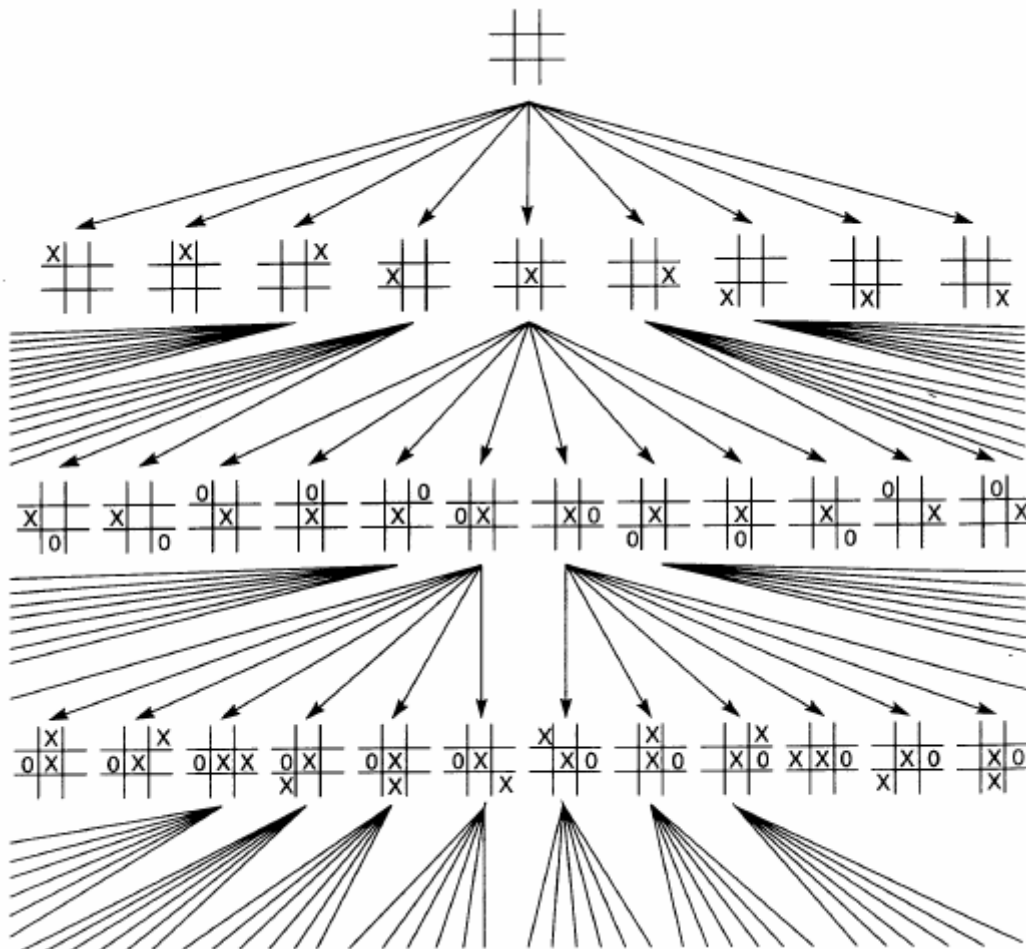
**Věta 3.2:** Ke každé hře v normálním tvaru lze nalézt více her v explicitním tvaru.

Na Obr. 5 pak vidíme v explicitním tvaru zápis hry kámen-nůžky-papír.

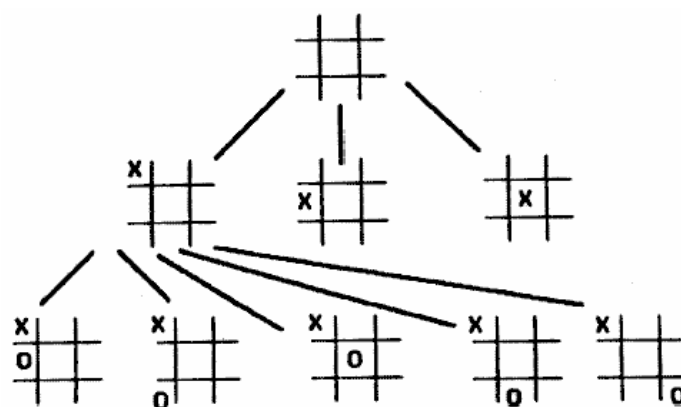


Obr. 5 Hra kámen-nůžky-papír v explicitním tvaru

**Příklad 3.1:** Tic-Tac-Toe (neboli americké piškvorky) se hraje na čtvercové síti 3x3 políčka. První z hráčů maluje křížky, druhý maluje kolečka. Hráči se střídají a vyhraje ten, komu se podaří umístit tři své symboly do řádku, do sloupce nebo na diagonálu. Hrubý odhad počtu pozic vychází z toho, že v každém z 9 polí může být o, x, nebo mezera, tedy  $3^9 = 19683$ . Podobně hrubý odhad počtu různých partií vychází z toho, že první tah může být do některého z 9 polí, druhý tah do některého z 8 polí atd, tedy  $9! = 362880$  (Obr. 6). Hrací pole je ale symetrické a ne všechny možné kombinace symbolů je přípustná (např. devět "x"). Je tedy 26830 různých partií (web).



Obr. 6 Tic-tac-toe bez uvažování symetrie



Obr. 7 Tic-tac-toe s uvažováním symetrie

## 3.2 Optimální strategie

### 3.2.1 Antagonistické hry

Cílem každého racionálního hráče je vyhrát, jinými slovy maximalizovat svoji výhru. Zabývejme se pouze strategiemi antagonistických her dvou hráčů, které jsou zapsány v normálním tvaru (viz Obr. 1). Uvedený zápis vyjadřuje hodnoty výher (výplat) hráče č. 1. Tento hráč volí mezi svými strategiemi (řádky  $i$  matice  $u(s_i, t_j)$ ) tak, aby jeho výhra byla maximální. Přitom ví, že jeho protihráč, hráč č. 2 bude své strategie volit tak, aby výhru hráče č. 1 minimalizoval. Hráč č. 1 tedy volí takovou strategii  $s^*$ , pro kterou minimální hodnota jeho výhry (v rámci tohoto řádku) bude ze všech řádků maximální:

$$s^* = \max_i \min_j u(s_i, t_j)$$

Hráč. č. 2 postupuje analogicky. Mezi svými strategiemi (sloupci  $j$  matice  $u(s_i, t_j)$ ) volí tu strategii  $t^*$ , pro kterou maximální hodnota jeho prohry (v rámci tohoto sloupce) bude ze všech sloupců minimální.

$$t^* = \min_j \max_i u(s_i, t_j)$$

Přitom platí, že

$$\max_i \min_j u(s_i, t_j) \leq \min_j \max_i u(s_i, t_j)$$

$\max_i \min_j u(s_i, t_j)$  se nazývá **dolní cena hry**

$\min_j \max_i u(s_i, t_j)$  se nazývá **horní cena hry**

**Def. 3.2:** Necht'

$$u(s^*, t^*) = \max_i \min_j u(s_i, t_j) = \min_j \max_i u(s_i, t_j)$$

Potom  $u(s^*, t^*)$  se nazývá **sedlový bod matice** a představuje tzv. **cenu hry**. Dvojce strategií  $(s^*, t^*)$  se nazývá **rovnovážný bod**.

Teorie her se snaží nalézt v každé hře **rovnovážný bod**, v němž hráči volí takové strategie, že žádný z nich nemá důvod svou strategii změnit za předpokladu, že nikdo z ostatních svou strategii nezmění. Pokud rovnovážný bod existuje, optimální strategie obou hráčů se nazývají **ryzí strategie**.

**Příklad:** Pro hru v normálním tvaru uvedenou na Obr. 2 má rovnovážný bod podobu  $(s_2, t_1)$ . Pro prvního hráče je totiž  $\min u(s_1, t_j) = 2$  a  $\min u(s_2, t_j) = 3$  a tedy  $\max \min u(s, t) = u(s_2, t_1)$  což odpovídá strategii  $s_2$ . Pro druhého hráče je pak  $\max u(s_i, t_1) = 3$  a  $\max u(s_i, t_2) = 4$  a tedy  $\min \max u(s, t) = u(s_2, t_1)$  což odpovídá strategii  $t_1$ .

Ne vždy ale rovnovážný bod a tedy ryzí strategie existuje. Uvažujme hru znázorněnou maticí z Obr. 8. Hráč č. 1 zvolí strategii  $s_2$ , neboť pro ní je  $\min_j u_{ij}$  největší (je to prvek  $u_{21}=7$ ). Hráč č. 2 zvolí strategii  $t_1$ , neboť pro ní je  $\max_i u_{ij}$  nejmenší (je to prvek  $u_{21}=9$ ). Tentokrát tedy dolní cena hry je menší než horní cena hry.

$$\max_i \min_j u(s_i, t_j) < \min_j \max_i u(s_i, t_j).$$

Tato hra nemá rovnovážný bod a proto pro ní neexistuje ryzí strategie.

**Def. 3.3:** Necht' máme maticovou hru popsanou maticí z Obr. 1. Necht'

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1 \text{ a zároveň } p_i > 0$$

$$q_1 + q_2 + \dots + q_l = 1 \text{ a zároveň } q_i > 0$$

Pak hru s výplatní funkcí

$$\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l p_i u_{ij} q_j$$

nazveme **smíšeným rozšířením** původní hry.

Stručně řečeno, smíšené rozšíření (a smíšené strategie) znamená, že každý z hráčů vybírá ze svých strategií s určitou pravděpodobností. Mluvíme pak o **smíšené strategii**, kterou zapisujeme jako vektor příslušných pravděpodobností.

**Příklad:** Vraťme se ke hře znázorněné na Obr. 8. Smíšenou strategii jednotlivých hráčů můžeme hledat jako extrém výplatní funkce, tedy jako hodnoty  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$  pro které  $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  bude maximální (minimální):

$$\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 11p_1q_1 + 5p_1(1-q_1) + 7q_1(1-p_1) + 9(1-p_1)(1-q_1) = 8p_1q_1 - 4p_1 - 2q_1 + 9$$

z toho

$$\frac{\partial \pi(p, q)}{\partial p_1} = 8q_1 - 4 = 0 \text{ a tedy } q_1 = 1/2$$

$$\frac{\partial \pi(p, q)}{\partial q_1} = 8p_1 - 2 = 0 \text{ a tedy } p_1 = 1/4$$

Hráč č. 1 tedy volí strategii  $(1/4, 3/4)$  a hráč č. 2 volí strategii  $(1/2, 1/2)$ . Pro tyto strategie je cena hry  $\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  maximální a rovná se 8.

$$\begin{array}{cc}
 & \text{hráč 2} \\
 & t_1 \quad t_2 \\
 \text{hráč 1} & \begin{pmatrix} s_1 & (11 & 5) \\ s_2 & (7 & 9) \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Obr. 8 Hra bez sedlového bodu

### 3.2.2 Neantagonistické hry

V případě neantagonistických her nejde výhra jednoho hráče na úkor hráčů ostatních. Hráči se o svých strategiích mohou (kooperativní hry) či nemohou (nekooperativní hry) domlouvat. Ukážeme se příklady hodnocení strategií her obou typů. Budeme opět uvažovat jen hry dvou hráčů, kterou můžeme tentokrát znázornit pomocí **dvojmatice** výplat (Obr. 9). Hodnota  $u_{ij}$  odpovídá výplatě prvního hráče v případě strategií  $s_i$  (první hráč) a  $t_j$  (druhý hráč), hodnota  $v_{ij}$  odpovídá výplatě druhého hráče v případě strategií  $s_i$  (první hráč) a  $t_j$  (druhý hráč).

$$\begin{array}{cc}
 & \text{hráč 2} \\
 & t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_l \\
 \text{hráč 1} & \begin{pmatrix} s_1 & (u_{11}, v_{11}) & (u_{12}, v_{12}) & \dots & (u_{1l}, v_{1l}) \\ s_2 & (u_{21}, v_{21}) & (u_{22}, v_{22}) & \dots & (u_{2l}, v_{2l}) \\ \vdots & & & \dots & \\ s_k & (u_{k1}, v_{k1}) & (u_{k2}, v_{k2}) & \dots & (u_{kl}, v_{kl}) \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Obr. 9 Dvojmaticová hra

**Def. 3.4:** Dvojice strategií  $(s^*, t^*)$  se nazývá **rovnovážný bod**, právě když

$$\begin{aligned}
 u(s, t^*) &\leq u(s^*, t^*) \quad \text{pro všechna } s \\
 v(s^*, t) &\leq v(s^*, t^*) \quad \text{pro všechna } t
 \end{aligned}$$

**Věta 3.3:** Necht' rovnovážnému bodu odpovídá prvek  $(u_{ij}, v_{ij})$ . Potom

$$\begin{aligned}
 u_{ij} &= \max_k u_{kj} \\
 v_{ij} &= \max_k v_{ik}
 \end{aligned}$$

#### Příklad: věžňovo dilema

Věžňovo dilema patří k nejznámějším příkladům nekooperativních her. Dva vězni jsou obviněni ze stejného trestného činu. Pokud se oba přiznají (P), budou oba odsouzeni na 5 let (přiznání je polehčující okolnost). Pokud budou oba zapírat (Z), budou oba odsouzeni za menší delikt na 1 rok. Pokud se přizná jen jeden, bude v roli korunního svědka osvobozen, ale druhý obviněný bude odsouzen na 10 let. Příslušný zápis této hry v normálním tvaru je na Obr. 10. Čísla v dvojmatici udávají výši trestu. Cílem „hráčů“ je tuto hodnotu minimalizovat, neboli zvolit strategii, pro kterou bude maximální výše trestu (pro možné strategie spoluobviněného) minimální. Tedy

$$\begin{aligned}
 \text{vězeň č. 1} & \quad s^* = \min_i \max_j u_{ij} \\
 \text{vězeň č. 2} & \quad t^* = \min_j \max_i v_{ij}
 \end{aligned}$$

Z toho vychází rovnovážná strategie  $(s^*, t^*) = (\text{přiznat}, \text{přiznat})$ . Pohledem na dvojmatici ovšem zjistíme, že vhodnější (z hlediska výše trestu) by byla strategie  $(\text{zapírat}, \text{zapírat})$ , neboť v tomto případě by výše trestu pro oba byla nižší – proto název hry „dilema“. Žádný z obviněných totiž neví, zda jeho komplic nepodlehne pokušení přiznat se a vyváznout bez trestu.

		vězeň 2	
		Z	P
vězeň 1	Z	(1,1)	(10,0)
	P	(0,10)	(5,5)

Obr. 10 Věžňovo dilema

### Příklad: manželská domluva

Manželé řeší otázku, jak strávit večer. Manžel by chtěl jít na fotbal, manželka preferuje divadlo. Večer však chtějí strávit společně. Tuto „hru“ můžeme znázornit maticí uvedenou na Obr. 11.

		manželka	
		<i>fotbal</i>	<i>divadlo</i>
manžel	<i>fotbal</i>	(2,1)	(0,0)
	<i>divadlo</i>	(0,0)	(1,2)

Obr. 11 Manželská domluva

Tato hra má dvě ryzí strategie v rovnovážných bodech  $(\text{fotbal}, \text{fotbal})$  a  $(\text{divadlo}, \text{divadlo})$ . Platí totiž, že prvek (2,1) představuje maximum v prvním řádku i prvním sloupci a prvek (1,2) představuje maximum ve druhém řádku i druhém sloupci. Hra má i jednu smíšenou strategii.

## 3.3 Hledání vhodné strategie

Následující dvě podkapitoly ukáží dva způsoby hledání vhodné strategie u antagonistických her: minimax a alfa-beta prořezávání. Obě strategie si ukážeme na příkladě hry zapsané v rozvinutém tvaru a reprezentované tedy stromem. Připomeňme, že některé algoritmy pro prohledávání stromu řešení jsme poznali v kapitole věnované stavovému prostoru. Hlavní rozdíl mezi těmito algoritmy a algoritmy pro hledání strategií při hrách spočívá v tom, že nyní nemáme kontrolu nad všemi přechody mezi uzly v daném stromu. Některé tahy totiž dělá náš protihráč. Přesněji: uvažujeme-li sekvenční hru dvou hráčů, pak hráč A se rozhoduje u uzlů, které mají sudou hloubku a hráč B se rozhoduje u uzlů, které mají lichou hloubku. Tomuto způsobu prohledávání, kdy žádný z hráčů nemá kontrolu nad všemi tahy se říká **adversarial search**.

### 3.3.1 Minimax

Minimaxová strategie pro rozhodování za neurčitosti byla popsána v předcházející kapitole. V teorii her se vychází z podobného principu: za předpokladu racionality protihráče volím takový tah, aby následný nejlepší tah protihráče byl z mého pohledu nejméně nebezpečný.

Minimaxovou strategii mohu hledat na základě zápisu hry v rozvinutém tvaru. Tento zápis je tvořen stromem, kde každému uzlu přiřadíme hodnoty na základě hodnot výher (hodnot funkce  $u$ ) v podstromu daného uzlu.

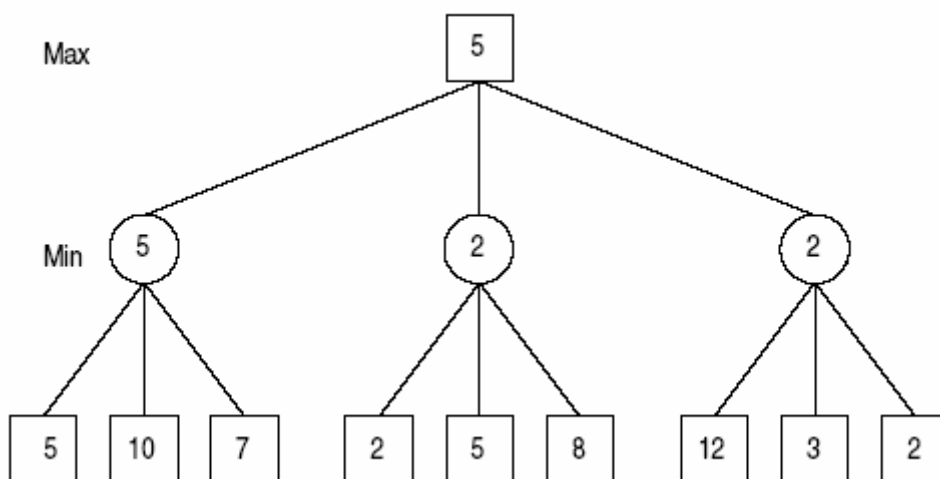


Jednotlivé uzly stromu se dělí do MAX úrovní (uzly se sudou hloubkou) a MIN úrovní (uzly s lichou hloubkou). Na každé MAX úrovni vybírá první hráč tah, který maximalizuje hodnotu určitého kritéria, na každé MIN úrovni vybírá druhý hráč tah, který minimalizuje hodnotu tohoto kritéria. (kritériu hodnotí tahy z pohledu prvního hráče). Tímto kritériem je tzv. MINIMAX hodnota:

$$MINIMAX(n) = \begin{cases} u(n) & \text{pro } n \text{ listový uzel} \\ \max_s MINMAX(s) & \text{pro } n \text{ je MAX uzel} \\ \min_s MINMAX(s) & \text{pro } n \text{ je MIN uzel} \end{cases}$$

kde  $s$  jsou všichni následníci uzlu  $n$ .

Ohodnocování uzlů probíhá od spodu - od listů reprezentujících koncovou situaci hry směrem ke kořeni. Příklad takto ohodnoceného stromu vidíme na Obr. 12. Je zřejmé, že první hráč zvolí tah odpovídající první větvi zleva.



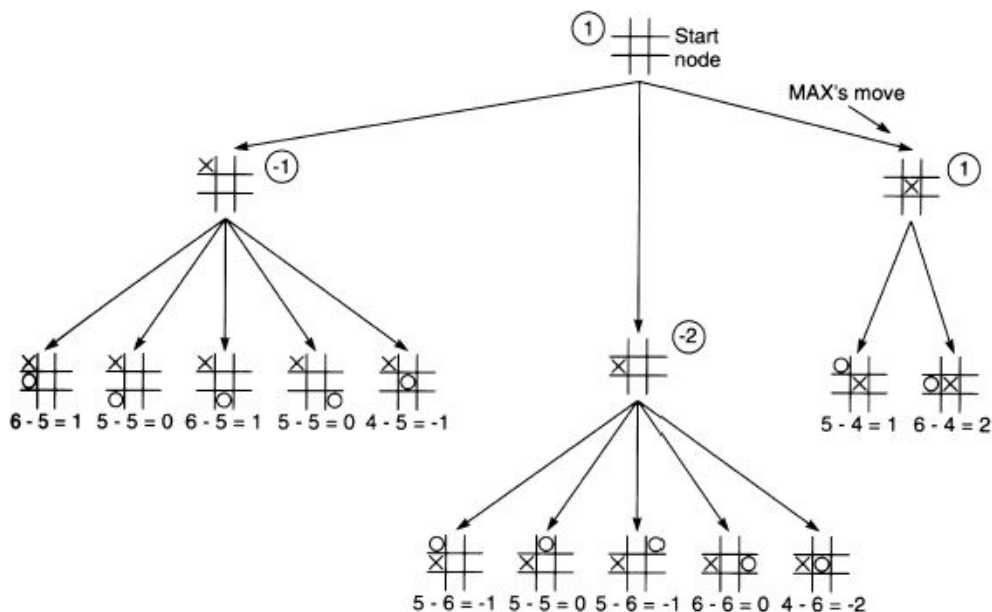
Obr. 12 Volba strategie dle minimaxu

Aplikace minimaxového přístupu předpokládá, že známe celý strom řešení. V reálných hrách to může být nepřekonatelný problém. Jak již bylo zmíněno, hra tic-tac-toe má 26830 různých partií, strom řešení pro šachy pak může mít okolo  $35^{100}$  uzlů (průměrný počet větvení 35, průměrná délka partie 50 tahů). Navíc, časová náročnost algoritmu  $O(b^d)$ , tedy exponenciální podle hloubky prohledávání (a paměťová náročnost je  $O(bd)$  – jde totiž o prohledávání do hloubky). Řešením je:

- omezit hloubku prohledávání
- pracovat pouze s odhady místo s přesnými hodnotami užítka pro jednotlivé uzly

### Příklad: Tic-Tac-Toe.

Obr. 13 ukazuje volbu prvního tahu s využitím minimaxu pro hru tic-tac-toe. Kritérium, kterým se hodnotí jednotlivé uzly je počet možných vítězných pozic **X** minus počet možných vítězných pozic **O**.



Obr. 13 Tic-tac-toe volba prvního tahu dle minimaxu

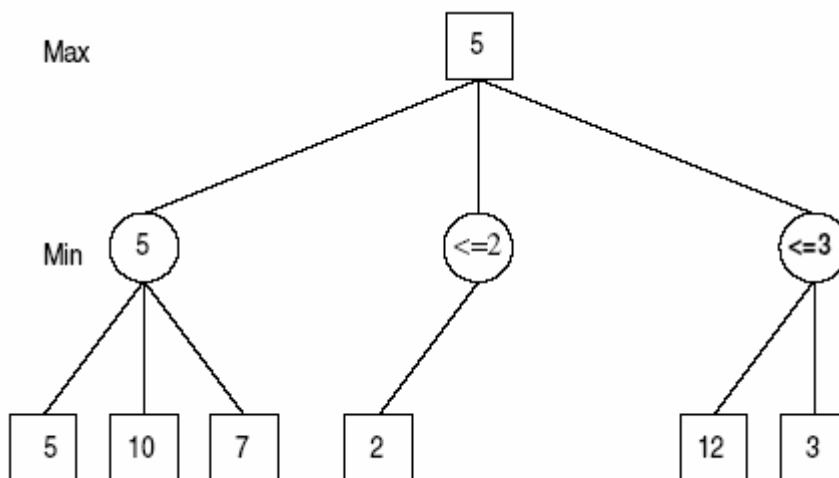
### 3.3.2 Alfa-beta prořezávání

Alfa-beta prořezávání je modifikace minimaxové strategie založená na metodě větví a mezi, která umožňuje „oříznout“ neperspektivní části stromu. V algoritmu se zavádí dvě nové hodnoty:

- $\alpha$  je nejlepší (největší) známá hodnota pro uzel MAX (na počátku  $\alpha = -\infty$ )
- $\beta$  je nejlepší (nejmenší) známá hodnota pro uzel MIN (na počátku  $\beta = \infty$ )

Pro každý MAX uzel postupně porovnáme *MINMAX* hodnotu jednotlivých následníků s hodnotou  $\beta$  a je-li *MINMAX*  $> \beta$ , pak zbylé následníky neprohledáváme. Pro každý MIN uzel postupně porovnáme *MINMAX* hodnotu jednotlivých následníků s hodnotou  $\alpha$  a je-li *MINMAX*  $< \alpha$  pak zbylé následníky neprohledáváme (viz Obr. 14 pro prohledávání následníků zleva doprava).

Lze dokázat, že časová složitost alfa-beta prořezávání klesne na  $O(b^{d/2})$ , můžeme tedy oproti minimaxu prohledávat do dvojnásobné hloubky.



Obr. 14 Volba strategie dle alfa-beta prořezávání

## Cvičení:

1) **Karty**. Každý ze dvou hráčů má dvě karty. Hráč č. 1 má 5♠ a 2♥, hráč č. 2 má 5♠ a 3♥. Oba hráči musí najednou ukázat jednu z karet. Dojde-li ke shodě barev, dostane první hráč od druhého absolutní hodnotu rozdílu hodnot obou karet. Liší-li se barvy, dostane ten, kdo ukázal kartu s vyšší hodnotou součet hodnot obou karet. Zapište tuto hru v normálním tvaru a nalezněte strategii.

2) **Kámen-nůžky-papír**. Najděte smíšenou strategii pro hru kámen-nůžky-papír definovanou následující maticí:

$$\begin{array}{c} \text{hráč 2} \\ \text{K} \quad \text{N} \quad \text{P} \\ \text{hráč 1} \begin{array}{l} \text{K} \\ \text{N} \\ \text{P} \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3) **Manželská domluva**. Najděte smíšenou strategii pro manželskou domluvu definovanou následující maticí:

$$\begin{array}{c} \text{manželka} \\ \text{fotbal} \quad \text{divadlo} \\ \text{manžel} \begin{array}{l} \text{fotbal} \\ \text{divadlo} \end{array} \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

4) **Tic-tac-toe**. Nalezněte strategii pro první dva tahy hry tic-tac-toe (minimax i alfa-beta prořezávání). Pro hodnocení pozic použijte počet možných vítězných pozic **X** minus počet možných vítězných pozic **O**. Může-li některý z hráčů umístit vítězný symbol, je tato pozice z jeho pohledu hodnocena hodnotou 100.

## Literatura:

Hykšová, M.: Teorie her. FD ČVUT Praha, <http://www.fimuni.org/teorie-her-m023/>, 2007

Mañas, M.: Teorie her a její aplikace, SNTL, Praha, 1991

Peliš, M.: Teorie her jako teorie racionálního rozhodování. [web.ff.cuni.cz/~pelis/gt-pelis.pdf](http://web.ff.cuni.cz/~pelis/gt-pelis.pdf), 2007

Štecha, J.: Optimální rozhodování a řízení. FEL ČVUT Praha, 1999.

Wikipedia: [http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie\\_her](http://cs.wikipedia.org/wiki/Teorie_her), 2007